21世纪全国高等院校实用规划教材

赠送 电子课件 www.pup6.com

赠送 习题参考答案 www.pup6.com

运筹学

（第2版）

- 重理论，更重方法
- 新增大量的应用案例
- 侧重实际问题的建模和计算

主　编　吴亚丽　张俊敏

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

说 明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要本书课件或其他相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！

21世纪全国高等院校实用规划教材

运　筹　学

（第2版）

主　编　吴亚丽　张俊敏

副主编　张海英　吴　园

参　编　屈漫利　魏宗田　常晓军

主　审　徐裕生

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是介绍运筹学的一些重要分支的基本理论和方法的基础教材，注重培养学生运用运筹学的方法分析和解决实际问题的能力，内容包括线性规划、动态规划、网络规划、决策与对策、存储问题、实验指导与运算软件 6 个部分，共 10 章。书中除了有大量例题外，还附有一定数量的习题。

本书前 9 章增加了应用案例、关键词及其英文对照两部分，补充了习题内容；第 10 章介绍了常用的 MATLAB 命令及相关函数和表达方法，WinQSB 软件、LINGO 软件及其使用方法，为满足不同实验环境提供了参考。

本书侧重于实际问题的建模和计算，可作为高等院校理工科运筹学课程教材，也可供从事实际工作的工程技术人员以及管理人员、企业家、商业经营者等学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/吴亚丽，张俊敏主编. —2 版. —北京：北京大学出版社，2011.6
(21 世纪全国高等院校实用规划教材)
ISBN 978-7-301-18860-6

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①吴…②张… Ⅲ. ①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 078995 号

书 名：运筹学(第 2 版)
著作责任者：吴亚丽 张俊敏 主编
策 划 编 辑：程志强
责 任 编 辑：程志强
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-18860-6/TP·1167
出 版 者：北京大学出版社
地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871
网 址：http://www.pup.cn http://www.pup6.com
电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印 刷 者：
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
787 毫米×1092 毫米 16 开本 14 印张 324 千字
2006 年 4 月第 1 版 2011 年 6 月第 2 版 2011 年 6 月第 1 次印刷
定 价：28.00 元

第 2 版前言

运筹学是 20 世纪 40 年代开始形成的一门新学科。它用定量分析的方法来研究现实世界系统运行的规律，从中提出具有共性的模型，寻求解决模型的方法，其目的是帮助管理者选择最优决策方案，因此运筹学是实现管理现代化必不可少的工具。运筹学又是一门应用学科，也是交叉学科，因此它在工程技术、生产管理、财政经济、军事作战、科学实验及社会科学中都得到广泛的应用，越来越受到各部门和企业的重视。目前许多高等院校的很多专业，特别是理工科专业都把运筹学列为选修课，有的专业已把它列为必修课。

本书具有以下特色：在叙述与论证方面力求简洁清晰，尽量避免冗长的定理证明；理论与算法能联系实际问题，特别注重实用性；在内容深度上力求能被具有高等数学、线性代数和概率统计基础知识的读者顺利地接受和掌握；注重运筹学与相关学科的互相渗透和促进；注重数学模型与计算机软件的结合，给出了与数学模型对应的算法，便于计算结果、分析结果。因此本书有助于培养学生的“优化”意识、决策能力和思考能力，特别是建立模型的能力和使用计算机软件解决实际问题的能力。

本书可作为理工科本科或大专院校的教材，也可供从事实际工作的工程技术人员、管理人员、企业家、商业经营者等学习参考。建议总课时为 40～60 课时，上机课时为 6～10 课时。

本书内容共 10 章，可分为 6 部分：线性规划(第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章)，动态规划(第 5 章)，网络规划(第 6 章)，决策与对策(第 7 章、第 8 章)，存储问题(第 9 章)，实验指导与运算软件(第 10 章，为综合性设计与训练提供帮助)。

参加本书编写的单位和人员：西安建筑科技大学魏宗田、张俊敏（负责编写绪论、第 5 章、第 7 章、第 8 章)，西安理工大学常晓军、屈漫利、吴亚丽、张海英(负责编写第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 6 章、第 10 章)，西安工程大学吴园(负责编写第 9 章)。教学课件的制作者：吴亚丽、张海英(负责制作绪论、第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章、第 6 章)，魏宗田、张俊敏(负责制作第 5 章、第 7 章、第 8 章)，吴园(负责制作第 9 章)。全书由吴亚丽、张俊敏担任主编，魏宗田、吴园担任副主编，张海英负责统稿，西安建筑科技大学的徐裕生教授担任主审。徐教授极其认真地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的改进意见，在此表示诚挚的感谢！

由于编者时间和水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请专家及读者批评指正。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

绪　论

一、运筹学的产生与发展

运筹学的英文名称为 Operations Research，简称 OR，意为“运用研究”或“操作研究”。作为一个科学名词，OR 最早出现于 20 世纪 30 年代末，50 年代后期由著名科学家钱学森、许国志等引入我国，其中文译名则是来自古语“运筹帷幄之中，决胜千里之外”(见《史记·高祖本记》)。因为运筹学不单有数学的含义，还含有规划、决策等其他相关学科的内容，更是有运用筹划、以策略取胜等意义，因此借用其中的“运筹”二字，恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

各国学者对运筹学的定义和解释各不相同。P. M. Morse 与 G. E. kimball 给运筹学下的定义是：“运筹学是在实行管理的领域，运用数学方法对需要进行管理的问题统筹规划、做出决策的一门应用科学。”运筹学的另一位创始人把运筹学定义为：“管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。”也有学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营做出决策的科学手段，它使用许多数学工具(包括高等数学、线性代数、概率统计、数理分析、随机过程等)和逻辑判断方法，来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题，以便获得最大效益。

运筹学的早期工作可以追溯到 20 世纪初，1914 年兰彻斯特(Lanchester)提出了军事运筹学的战斗方程；1917 年排队论的先驱爱而朗(Erlang)提出了排队论的一些著名公式。而存储论的最优批量公式是在 20 世纪 20 年代初提出来的，列温逊(Lewin Johnson)则在 20 世纪 30 年代已经开始用运筹学思想分析商业广告和顾客心理。运筹学的活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始的，当时迫切需要把各种稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事活动团体，所以英国和美国等军事管理当局号召科学家运用科学手段来处理战略与战术问题。在第二次世界大战期间，运筹学成功地解决了许多重要的作战问题，显示了其巨大的威力。

但是作为数学的一门分支学科，运筹学是在第二次世界大战后期才形成的。在战后的工业恢复时期，由于组织内与日俱增的复杂性和专业化所产生的问题，使运筹学进入工商企业和其他部门，并在 20 世纪 50 年代以后得到广泛的应用。其中，系统配置、聚散、竞争、优化的运用机理得到深入的研究和应用，形成了一套较完备的理论，如规划论、排队论、存储论、决策论等。后来电子计算机的问世又大大促进了运筹学的发展。不久许多国家相继成立了专门的运筹学会，1948 年英国成立了运筹学学会，1952 年美国成立了运筹学学会，1957 年国际运筹学协会成立了，至 1986 年全世界已有 38 个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织。我国于 1956 年由中国科学院成立了运筹学小组，并于 1980 年成立了运筹学学会。

运筹学概念虽然起源于欧美国家，但在学科研究方面，我国并不落后。20 世纪 50 年代中期，著名数学家华罗庚等老一辈科学家的贡献最为突出 20 世纪六七十年代，华罗庚的“优选法”和“统筹法”被许多部门采用，取得很好的经济效益，受到中央领导的好

评。改革开放以来，运筹学的应用更为普遍，例如，运用线性规划进行全国范围的粮食、钢材的合理调运和广东省内水泥的合理调运等，同时简单易行的“图上作业法”也发挥了作用。运筹学方法在企业管理中的应用取得了明显的经济效益，提高了企业的管理水平，受到企业决策层和主管部门的重视。

二、运筹学的性质与特点

运筹学是一门应用科学，它广泛地应用现有的科学技术知识和数学方法来解决实际问题。运筹学研究的对象是经济、军事及科学技术等活动中，能用数量关系来描述的有关决策、筹划与管理等方面的问题。运筹学着重以管理、经济活动方面的问题及解决这些问题的原理和方法作为研究对象。

运筹学发展到今天，内容已相当丰富，分支也很多，主要包括线性规划、整数规划、目标规划、多目标规划、非线性规划、动态规划、图与网络、决策论、对策论、排队论、存储论、可靠性与质量管理、层次分析法等。显然，运筹学具有多学科交叉的特点，是跨学科的应用科学。

由于运筹学具有广泛的应用性，为了有效地应用运筹学，英国前运筹学会会长汤姆林森(Tomlin Son)提出了以下 6 条原则。

(1) 合作原则：运筹学工作要和各方面的人士，尤其是同实际部门工作者合作。

(2) 催化原则：在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法。

(3) 互相渗透原则：要求多部门彼此渗透地考虑问题，而不是只局限于本部门。

(4) 独立原则：在研究问题时，不应受某人或某部门的特殊政策所左右，应独立工作。

(5) 宽容原则：解决问题的思路要宽，方法要多，而不是局限于某种特定的方法。

(6) 平衡原则：要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡。

总之，应用运筹学要集思广益，取长补短，灵活运用，积极进取。运筹学在研究问题方面具有以下特点。

(1) 运筹学借助于模型，用定量分析或定量与定性分析相结合的方法，合理地解决实际问题，广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题，故其应用不受行业和部门的限制。

(2) 运筹学是多学科专家集体协作研究的结晶。运筹学既对各种经营活动进行创造性的科学研究，又涉及组织的实际管理问题，具有很强的实践性，最终能向决策者提供建设性意见，并收到实效。

(3) 运筹学以“整体最优”为目标，从系统的观点出发，力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突；对所研究的问题求出最优解或最佳的行动方案，所以它也常被看成是一门优化技术，它提供的是解决各类问题的优化方法。

(4) 电子计算机是不可缺少的工具，计算机的发展使许多运筹学方法得以实现和发展。目前已有不少可以求解运筹学各种问题的成熟软件，如 MATLAB、QSB、LINDO、LINGO 等。

三、运筹学的模型与应用

运筹学在解决实际问题的过程中，其核心问题是建立模型，建立模型的主要步骤

如下。

1. 明确目标

即通过对实际问题的调查研究，搜集有关资料，弄清问题的目标、可能的约束、问题的有关变量及有关参数。

2. 建立模型

构建模型是运筹学研究的关键步骤，模型主要有像形模型、模拟模型和数学模型三大类型，其中以数学模型为主。在建立模型时，往往要根据一些理论的假设或设立一些前提条件，对模型进行必要的抽象和简化。

建立模型需要注意以下几点。

(1) 要有一组决策变量。

(2) 要有一组反映系统逻辑和约束关系的约束方程。

(3) 建立能反映决策目标的目标函数。

(4) 搜集与系统密切相关的各种参数。

3. 求解与检验

对建立的模型求解计算，得到的结果只是解决问题的一个初步方案。结果是否满意，还需检验；若不满意，要重新考虑模型的建立是否合理，采用的数据是否完整与科学，并对模型进行修正或更改。经过反复检验和修正模型后求得的结果才是符合实际的可行方案。

需要注意的是，由于模型和实际存在差异，由模型得到的最优解可能是实际系统的近似解或者满意解，因此得到的结果只能给决策者提供一个决策的参考。

4. 分析与实施

当求出结果后，必须对结果进行分析。要求管理人员(决策者)和建模人员共同参与，让决策者了解求解的方法步骤，对结果赋予经济含义，并从中获取求解过程中宝贵的经济信息，便于结果的真正实施。

近几十年来，运筹学的模型已广泛应用于许多领域。在军事、交通运输及国民经济各部门的资源分配与管理、工程优化设计、市场预测与分析、生产计划管理、库存管理、计算机与管理信息系统等诸多领域都有重要的应用成果出现。

运筹学模型的应用越来越受到重视。以兰德公司(RAND)为首的一些部门十分注重研究战略性问题，如为美国空军评价各种轰炸机系统，讨论未来的武器系统和未来战争的战略。

美国的杜邦公司在 20 世纪 50 年代就非常重视运筹学在广告工作、产品评价和新产品开发方面的应用；通用电气公司还对某些市场进行了模拟研究；美国的西电公司将库存理论与计算机的物质管理信息相结合，取得了显著的成效。

在我国，为解决粮食部门的合理运输问题，数学家万哲先提出了“图上作业法”，管梅谷教授提出了“中国邮递员问题”。排队论应用于矿山、港口、电信及计算机设计等方面；图论用于线路布置、计算机设计和网络流量控制问题；存储论在应用汽车工业等方面也获得了成功。运筹学目前已趋向研究和解决规模更大、更复杂的问题，并与系统工程紧密结合。这门学科今后必将在科学技术现代化和管理现代化进程中发挥巨大的作用。

第 1 章　线性规划及单纯形法

线性规划是运筹学的一个重要分支。1947 年，当时正在美国空军担任数学顾问的丹捷格(Dantzig)在《最优规划的科学计算》中提出“如何使规划过程机械化”的问题，并着手建立数学模型。他从改造投入产出模型入手，经逐步研究，形成了“单纯形法”，并于 1953 年提出了“改进单纯形法”，以解决计算机求解过程中的舍入误差问题。之后，线性规划理论逐步趋向成熟，在实用中日益广泛和深入。特别是随着计算机应用的日益普及，线性规划的适用领域更为广泛。

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

在生产管理和经营活动中经常提出的一类问题是：如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，才能得到最好的经济效果。

【例 1.1】 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原材料的消耗量，见表 1-1。该工厂每生产单位产品Ⅰ可获利润 2 元，每生产单位产品Ⅱ可获利润 3 元，问应如何安排生产计划才能使该工厂获得的利润最大？

表 1-1　产品、资源信息

资源 \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	资源限量
设备/台	1	2	8
原材料 A/kg	4	0	16
原材料 B/kg	0	4	12

解：设 x_1、x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ、Ⅱ的生产量，在满足资源限量的条件下，它们必须同时满足下列条件。

对设备有效台数：　　$x_1+2x_2\leqslant 8$

对原材料 A：　　$4x_1\leqslant 16$

对原材料 B：　　$4x_2\leqslant 12$

该工厂的生产目标是在不超过所有资源限量的条件下，确定生产量 x_1、x_2，使该厂得到的利润最大。若用 Z 表示总利润，则有

$$\max Z=2x_1+3x_2$$

综合上述，该生产计划问题可用数学模型表示为

$$\max Z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1.2】 某工地租赁甲、乙两种机械来安装 A、B、C 这 3 种构件，这两种机械每天的安装能力见表 1-2。工程任务要求安装 250 根 A 构件，300 根 B 构件和 700 根 C 构件；又知机械甲每天的租赁费为 250 元，机械乙每天的租赁费为 350 元，试决定租赁甲、乙机械各多少天，才能使总租赁费最少？

表 1-2 机械安装能力信息

机械 / 构件	A	B	C
机械甲	5	8	10
机械乙	6	6	20

解： 设租赁机械甲 x_1 天，机械乙 x_2 天。为满足 A、B、C 这 3 种构件的安装要求，必须满足以下条件

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 250 \\ 8x_1 + 6x_2 \geqslant 300 \\ 10x_1 + 20x_2 \geqslant 700 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

若用 Z 表示总租赁费，则该问题的目标函数可表示为 $\min Z = 250x_1 + 350x_2$。该问题的数学模型可表示为

$$\min Z = 250x_1 + 350x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 250 \\ 8x_1 + 6x_2 \geqslant 300 \\ 10x_1 + 20x_2 \geqslant 700 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的数学模型

从 1.1.1 节的两个例题可以看出，它们都属于同一类优化问题。下面介绍建立这类实际问题线性规划模型的基本步骤。

(1) 确定决策变量。这是很关键的一步，决策变量选取得当，不仅会使线性规划的数学模型建立得容易，而且求解比较方便。

(2) 找出所有限制条件，并用决策变量的线性等式或不等式来表示，从而得到约束条件。一般可用表格形式列出所有的限制数据，然后根据所列出的数据写出相应的约束条件，以避免遗漏或重复所规定的限制要求。

(3) 把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数来表示，得到目标函数，并确定是求最大值还是最小值。

(4) 根据实际问题添加非负约束。

线性规划的数学表达式称为线性规划的数学模型，一般形式为

$$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_1 & (1-2)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant0 & (1-3)\end{cases}$$

其中，式(1－1)称为目标函数；式(1－2)、式(1－3)统称为约束条件；式(1－3)称为非负约束。

1.1.3 线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式。目标函数有求 max 的，有求 min 的；约束条件可以是“≤”形式的不等式，也可以是“≥”形式的不等式，还可以是等式；决策变量一般是非负约束，但也允许在(－∞，＋∞)范围内取值，即无约束。为了便于讨论和求解，需要将线性规划问题的数学模型写成一个统一的格式，称为线性规划问题的标准型，其统一的格式规定如下。

(1) 目标函数取最大化。

(2) 所有约束条件用等式来表示。

(3) 所有决策变量取非负值。

(4) 每一个约束条件的右端常数(资源限量)为非负值。

由此，线性规划问题的标准型为

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant0 \end{cases}$$

其简缩式为

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

用向量形式可写为

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j=b \\ x_j\geqslant0 \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$；$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{nj})^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=$

$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$；

向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的决策变量是 x_j。

用矩阵形式可表示为

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{O}\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n]$$

$\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量，一般 $m\leqslant n$。

通常称 $\boldsymbol{A}$ 为约束条件的 $m\times n$ 维系数矩阵；$\boldsymbol{b}$ 为资源向量；$\boldsymbol{C}$ 为价格向量；$\boldsymbol{X}$ 为决策变量向量。

线性规划问题的数学模型都可以变换为标准型，具体步骤如下。

(1) 目标函数为最小化即 $\min Z=\boldsymbol{CX}$ 时，变换为求目标函数最大化，令 $Z'=-Z$，则 $\max Z'=-\boldsymbol{CX}$。

(2) 约束方程为不等式时，这里有两种情况：一种是"$\leqslant$"形式的不等式，则可在"$\leqslant$"不等号的左端加入一个非负松弛变量，把原"$\leqslant$"不等式变为等式；另一种是"$\geqslant$"形式的不等式，则可在"$\geqslant$"不等号的左端减去一个非负剩余变量，把"$\geqslant$"不等式变为等式。下面举例说明。

【例 1.3】 将例 1.1 的数学模型化为标准型。

例 1.1 的数学模型为

$$\max Z=2x_1+3x_2$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\ 4x_1\leqslant 16\\ 4x_2\leqslant 12\\ x_1, x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解： 在约束不等式中分别加上一个松弛变量 x_3、x_4、x_5，使不等式变为等式，这时得到标准型

$$\max Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\ 4x_1+x_4=16\\ 4x_2+x_5=12\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geqslant 0\end{cases}$$

所加松弛变量 x_3、x_4、x_5 表示资源的剩余量，当然也就没有利润，在目标函数中其系数 c_3、c_4、c_5 为零。

(1) 若存在取值无约束的决策变量 x_k，可令 $x_k=x_k'-x_k''$，其中 $x_k', x_k''\geqslant 0$。

(2) 若存在 $b_l<0$ 的约束条件，则在约束条件的两边同乘(-1)。

以上讨论说明，任何形式的线性规划问题的数学模型都可以化为标准型。

【例 1.4】 将下列线性规划问题化为标准型。

$$\min Z=-x_1+2x_2-3x_3$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3\leqslant 7 \\ x_1-x_2+\ x_3\geqslant 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3=-5 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：(1) 令 $x_3=x_4-x_5$，其中 x_4，$x_5\geqslant 0$。

(2) 在第一个约束不等式的左端加入非负松弛变量 x_6。

(3) 在第二个约束不等式的左端减去非负剩余变量 x_7。

(4) 在第三个约束条件的两边同乘(−1)。

(5) 令 $Z'=-Z$，把求 $\min Z$ 改为求 $\max Z'$，即可得到该问题的标准型。

$$\max Z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0x_6+0x_7$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+\ (x_4-x_5)+x_6\qquad =7 \\ x_1-x_2+\ (x_4-x_5)\qquad -x_7=2 \\ -3x_1+x_2+2(x_4-x_5)\qquad\qquad =5 \\ x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

注：以下所涉及的线性规划问题，若无特别说明，均指标准型。

1.2　线性规划问题解的基本理论

1.2.1　线性规划问题的图解法

为了给后面的线性问题的基本理论提供较直观的几何说明，本书先介绍线性规划问题的图解法。

把满足约束条件和非负条件的一组解叫做可行解，所有可行解组成的集合称为可行域。

图解法的一般步骤如下。

(1) 建立平面直角坐标系。

(2) 根据线性规划问题的约束条件和非负条件画出可行域。

(3) 做出目标函数等值线 $Z=c$(c 为常数)，然后根据目标函数平移等值线至可行域边界，这时目标函数与可行域的交点即为最优解。

【例 1.5】 对例 1.1 用图解法求解。

解：在以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 x_1，$x_2\geqslant 0$ 是指解值在第一象限，每个约束条件都代表一个半平面，如约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 是代表以直线 $x_1+2x_2=8$ 为边界的左下方的半平面，则它满足所有约束条件和非负条件的可行解集合即为可行域，如图 1.1 所示的阴影部分。

再分析目标函数 $Z=2x_1+3x_2$，令 $Z=c$，随着 c 的取值不同，可得到平面上一组平行线。位于同一直线上的点具有相同的目标函数值，即称为“等值线”，当 c 值由小变大时，直线 $2x_1+3x_2=c$ 沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时，使 Z 值在可行域上实

现最大化(如图 1.2 所示)，这就得到了例 1.1 的最优解 $Q_2(4,2)$，$Z=14$。这说明该厂的最优生产计划方案是：生产Ⅰ产品 4 个单位，生产Ⅱ产品 2 个单位，可得最大利润 14 元，该线性规划问题有唯一最优解。

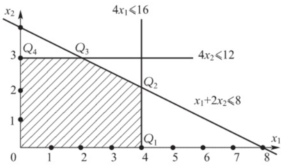


图 1.1 可行域

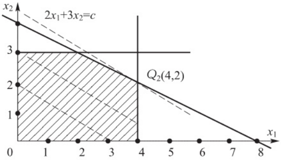


图 1.2 唯一最优解

若将例 1.1 的目标函数变为 $\max Z=2x_1+4x_2$，则表示目标函数的等值线与约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的边界线 $x_1+2x_2=8$ 平行。当 Z 值由小变大时，与线段 Q_2Q_3 重合，如图 1.3 所示，线段 Q_2Q_3 上任意一点都使 Z 取得相同的最大值，即这个线性规划问题有无穷多最优解。

【例 1.6】 用图解法求解下列线性规划问题

$$\max Z=x_1+x_2$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：求解结果如图 1.4 所示，从图中可以看到，该线性规划可行域无界、目标函数可以无限增大，因此称这种解为无界解，即最优解无界。

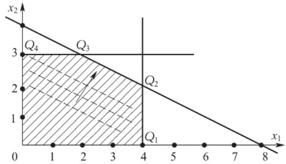


图 1.3 无穷多最优解

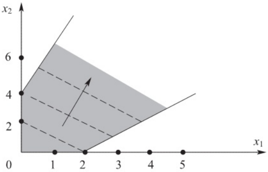


图 1.4 无界解

如果在例 1.1 的数学模型中增加一个约束条件：$-2x_1+x_2\geqslant 4$，则该线性规划问题的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

通过上述几个图解法的例子可以看到，当线性规划问题的可行域为非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，它一定可以在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们的连线上任意一点都是最优解，如图 1.3 所示，即有无穷多最优解；若可行域无界，如图 1.4 所示，则最优解无界。

线性规划问题的解有 4 种情况：唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解。

1.2.2 线性规划问题解的几何意义

在 1.2.1 节介绍图解法时，已直观地看到可行域和最优解的几何意义。在一个线性规划问题中，每一个约束条件(包括资源约束与非负约束)实际上对应着平面坐标系的一个半平面(三维坐标系为半空间)，而所有的这些半平面的共同部分，就构成了这个线性规划问题的可行域。如果用 s_j 表示每一个半平面，用 s 表示可行域，则有 $s=s_1\cap s_2\cap\cdots\cap s_m$，其中可行域中的每一个点都是可行解，能够使目标函数取得极值的可行解就是最优解。下面从理论上进一步讨论。

1. 基本概念

(1) 基：设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组的 $m\times n$ 阶系数矩阵，其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵($|\boldsymbol{B}|\neq 0$)，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基。这就是说，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 m 个线性独立的列向量组成的，为不失一般性，可设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_m]$$

称 $\boldsymbol{P}_j(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$为基向量，与 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 $x_j(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$称为基变量，其余变量 m_{m+1}，$\cdots$，x_n 称为非基变量。在约束方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中，若 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基，令其非基变量都等于零，就可求得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$，称为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 关于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。

(2) 基本可行解：满足非负条件的基本解称为基本可行解。基本可行解对应的基称为可行基。一般地，线性规划通常最多可以有 C_n^m 个基本解，各种解之间的关系如图 1.5 所示。

(3) 退化的基本可行解：一个基本可行解中的非零分量小于 m 个时，则该解称为退化的基本可行解，该解对应的基称为退化基，如果有关的线性规划问题的所有基本可行解都是非退化解，则该问题称为非退化的线性规划问题。

(4) 凸集：设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集，若任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in K$，$\boldsymbol{X}^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点

$$\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}\in K\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

则称 K 为凸集。如图 1.6(a)、图 1.6(b)所示是凸集，图 1.6(c)所示不是凸集。

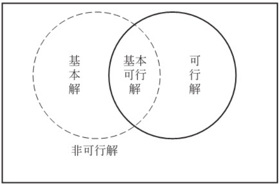


图 1.5 解之间的关系

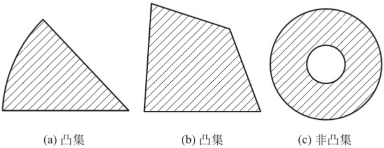


图 1.6 凸集和非凸集

(5) 凸组合：设 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，…，$\boldsymbol{X}^{(k)}$ 是欧氏空间中的 k 个点，若存在 k 个数 u_1，u_2，…，u_k，满足 $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i = 1, 0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$，则称 $X = u_1 X^{(1)} + u_2 X^{(2)} + \cdots + u_k X^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，…，$\boldsymbol{X}^{(k)}$ 的凸组合。

(6) 顶点：设 K 是凸集，$\boldsymbol{X} \in K$；若 $\boldsymbol{X}$ 不能用不同的两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in K$，$\boldsymbol{X}^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为

$$\boldsymbol{X} = \alpha \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\alpha) \boldsymbol{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 K 的一个顶点(或极点)。

2. 基本定理

定理 1-1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$\boldsymbol{D} = \left\{ \boldsymbol{X} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b},\ x_j \geqslant 0 \right\}$$

是凸集。

证：为了证明满足线性规划问题的约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b},\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n$$

的所有点(可行解)组成的集合是凸集，只要证明 D 中任意两点的连线上的点必然在 D 内即可。

设
$$\boldsymbol{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{D}$ 内的任意两点，且 $\boldsymbol{X}^{(1)} \neq \boldsymbol{X}^{(2)}$，则有

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j^{(1)} = \boldsymbol{b},\ x_j^{(1)} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j^{(2)} = b,\ x_j^{(2)} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

令 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$ 连线段上的任意一点，即

$$\boldsymbol{X} = \alpha \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\alpha) \boldsymbol{X}^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$\boldsymbol{X}$ 的每一个分量 $x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha) x_j^{(2)}$，把它代入约束条件，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j [\alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha) x_j^{(2)}] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j^{(2)} \\
&= \alpha \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - \alpha \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

又因为 $x_j^{(1)}$，$x_j^{(2)} \geqslant 0$，$\alpha > 0$，$1-\alpha > 0$，所以 $x_j \geqslant 0$，$j = 1, 2, \cdots, n$。由此可见 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D}$ 是凸集。

引理 1-1 线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基本可行解的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

定理 1-2 线性规划问题的基可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应于可行域 $\boldsymbol{D}$ 的顶点。(证明见运筹学教材编写组《运筹学》清华大学出版社)

引理 1-2 若 K 是有界凸集，则任意一点 $\boldsymbol{X} \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。

定理 1-3 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

证： 设 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$ 是可行域的顶点，若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，且目标函数在 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 处达到最优 $Z^*=\boldsymbol{CX}^{(0)}$（标准型是 $Z^*=\max Z$）。

因为 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，所以它可以用 $\boldsymbol{D}$ 的顶点线性表示为

$$X^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X^{(i)},\quad \alpha_i\geqslant 0\cdots,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

所以

$$CX^{(0)}=C\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i CX^{(i)}\tag{1-4}$$

在所有的顶点中，必然能找到某个顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$，使 $\boldsymbol{CX}^{(m)}$ 是所有 $\boldsymbol{CX}^{(i)}$ 中的最大者，并且将 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 代替式(1-4)中所有的 $\boldsymbol{X}^{(i)}$，这就得到

$$\boldsymbol{C}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{X}^{(i)}\leqslant\boldsymbol{C}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{X}^{(m)}=\boldsymbol{CX}^{(m)}$$

由此得到

$$\boldsymbol{CX}^{(0)}\leqslant\boldsymbol{CX}^{(m)}$$

根据假设 $\boldsymbol{CX}^{(0)}$ 为最大值，所以只能有

$$\boldsymbol{CX}^{(0)}=\boldsymbol{CX}^{(m)}$$

即目标函数在顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 处也达到最大值。

有时目标函数可能在多个顶点处达到最大值，这时在这些顶点的凸组合上也达到最大值，称这种线性规划问题有无穷多个最优解。

假设 $\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}$，$\hat{\boldsymbol{X}}^{(2)}$，…，$\hat{\boldsymbol{X}}^{(m)}$ 是目标函数达到最大值的顶点，若 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是这些顶点的凸组合，即

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\sum_{i-1}^{k}\alpha_i\hat{X}^{(i)},\quad \alpha_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

于是

$$C\hat{\boldsymbol{X}}=C\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\hat{X}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i C\hat{X}^{(i)}$$

设 $$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}^{(i)}=m,\quad i=1,2,\cdots,k$$

于是

$$C\hat{X}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_I m=m$$

另外，若可行域无界，则可能无最优解，如果存在最优解也必定在某顶点上得到。根据以上讨论，可以得到以下结论。

线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集，也可能为无界域，它们有有限个顶点，线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点；若线性规划问题有最优解，则必定在某个顶点上得到。虽然顶点数目是有限的（它不大于 C_n^m 个），若采用“枚举法”找所有基可行解，然后一一比较，最终可能找到最优解；但是当 n、m 数较大时，这种方法是行不通的，所以要继续讨论找到最优解的有效方法，这就是 1.3 节要介绍的单纯形法。

1.3 单 纯 形 法

单纯形法的基本思路是：根据线性规划问题的标准型，从可行域中某个基本可行解(一个顶点)开始，转换到另一个基本可行解(顶点)，并且当目标函数达到最大值时，问题就得到了解决。

1.3.1 单纯形法的基本思路

【例 1.7】 讨论例 1.1 的求解。

已知例 1.1 的标准型为

$$\max Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5 \tag{1-5}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5 \end{cases} \tag{1-6}$$

约束条件式(1-6)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{P}_3,\ \boldsymbol{P}_4,\ \boldsymbol{P}_5)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，x_3、x_4、x_5 的系数列向量

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_5=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是线性独立的，因而这些向量构成一个基：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_3,\ \boldsymbol{P}_4,\ \boldsymbol{P}_5)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基变量为 x_3、x_4、x_5，从约束条件式(1-6)中可以得到

$$\begin{cases} x_3=8-x_1-2x_2 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_5=12-4x_2 \end{cases} \tag{1-7}$$

当令非基变量 $x_1=x_2=0$，这时得到一个基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$：

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,\ 0,\ 8,\ 16,\ 12)^{\mathrm{T}}$$

将式(1-7)代入目标函数式(1-5)得到

$$Z=0+2x_1+3x_2=0 \tag{1-8}$$

这个基本可行解表示：工厂没有安排生产Ⅰ、Ⅱ产品；资源都没有被利用，所以工厂的利润 $Z=0$。

分析目标函数的表达式(1-8)可以看到：非基变量 x_1、x_2 的系数都是正数，因此将非基变量变为基变量，目标函数的值就可能增大，从经济意义上讲，安排生产产品Ⅰ或Ⅱ，就可以使工厂的利润指标增加，所以只要在目标函数式(1-8)的表达式中还存在有正系数的非基变量，这就表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与某个基变量

进行对换，一般选择正系数最大的那个非基变量 x_2 为换入变量，将它换入到基变量中去，同时还要确定基变量中有一个要换出来成为非基变量，可按以下方法来确定换出变量。

现分析式(1-7)，当将 x_2 定为换入变量后，必须从 x_3、x_4、x_5 中换出一个，并保证其余的都非负，即 x_3、x_4、$x_5 \geqslant 0$。

当 $x_1=0$，由式(1-7)得到

$$\begin{cases} x_3=8-2x_2 \geqslant 0 \\ x_4=16 \geqslant 0 \\ x_5=12-4x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-9}$$

从式(1-9)中可以看出，只有选择

$$x_2=\min(8/2,\ -12/4)=3$$

时，才能使式(1-9)成立。横杠表示式(1-9)中的第二个式子永远成立，不需要考虑这个条件。因为当 $x_2=3$ 时，基变量 $x_5=0$，所以可用 x_2 去替代 x_5。

以上数学模型说明了每生产一件产品Ⅱ，需要用掉的各种资源数为(2，0，4)。这些资源中的薄弱环节确定了产品Ⅱ的产量。原材料 B 的数量决定产品Ⅱ的产量只能是 $x_2=12/4=3$ 件。

为了求得以 x_3、x_4、x_2 为基变量的一个基本可行解和进一步分析问题，需将方程式(1-7)中 x_2 的位置与 x_5 的位置对换。得到

$$\begin{cases} x_3+2x_2=8-x_1 \\ x_4=16-4x_1 \\ 4x_2=12-x_5 \end{cases} \tag{1-10}$$

用高斯消去法求解，得到以非基变量表示的基变量为

$$\begin{cases} x_3=2-x_1+0.5x_5 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_2=3-0.25x_5 \end{cases} \tag{1-11}$$

再将式(1-11)代入目标函数式(1-5)得到

$$Z=9+2x_1-0.75x_5 \tag{1-12}$$

令非基变量 $x_1=x_5=0$，得到 $Z=9$，并得到另一个基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,\ 3,\ 2,\ 16,\ 0)^{\mathrm{T}}$。

从目标函数的表达式(1-12)中可以看到，非基变量 x_1 的系数是正的，说明目标函数的值还可以增大，还不是最优解。于是用上述方法，确定换入、换出变量，继续迭代，再得到另外一个基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(2)}=(2,\ 3,\ 0,\ 8,\ 0)^{\mathrm{T}}$。

再经过一次迭代，得到一个基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}$。

而这时得到的目标函数的表达式是

$$Z=14-1.5x_3-0.125x_4 \tag{1-13}$$

再分析目标函数式(1-13)，可知所有非基变量 x_3、x_4 的系数都是负数。这说明若要用剩余资源 x_3、x_4，就必须支付附加费用。所以当 $x_3=x_4=0$ 时，即不再利用这些资源时，目标函数达到最大值，那么 $\boldsymbol{X}^{(3)}$ 是最优解。这说明当产品Ⅰ生产 4 个单位，产品Ⅱ生产 2 个单位时，工厂才能得到最大利润。

通过上例，可以了解利用单纯形法求解线性规划问题的思路。现将每步迭代得到的结果与图解法进行对比，其几何意义就很清楚了。

例 1.1 的线性规划问题是二维的，即有两个变量，当加入松弛变量 x_3、x_4、x_5后，变换为高维的。这时可以想象，满足所有约束条件的可行域是高维空间的凸多面体(凸集)，这个凸多面体上的顶点，就是基本可行解。初始基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,\ 0,\ 8,\ 16,\ 12)^{\mathrm{T}}$ 就相当于图 1.1 中的原点(0，0)，$\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,\ 3,\ 2,\ 16,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1.1 中的 Q_4 点(0，3)；$\boldsymbol{X}^{(2)}=(2,\ 3,\ 0,\ 8,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1.1 中的 Q_3 点(2，3)，最优解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=(4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1.1 中的 Q_2 点(4，2)。从初始基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 开始迭代，依次得到 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，$\boldsymbol{X}^{(3)}$。这相当于图 1.1 中的目标函数平移时，从 0 点开始，首先移到 Q_4，然后移到 Q_5，最后到达 Q_2。下面讨论一般线性规划问题的求解。

1.3.2 单纯形法的一般描述和求解步骤

一般的线性规划问题的求解有以下几个步骤。

(1) 确定初始基本可行解。为了确定初始可行解，首先要找出初始可行基。

设一线性规划问题为

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{cases}\tag{1-14}$$

可分以下两种情况讨论。

① 若 $\boldsymbol{P}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$中存在一个单位基，则将其作为初始可行基：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_m)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

② 若 $\boldsymbol{P}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$中不存在一个单位基，则人为地构造一个单位初始基。关于这个方法将在本章第 1.4 节中深入讨论。

(2) 检验最优解。得到初始基本可行解后，要检验该解是否为最优解。如果是最优解，则停止运算；否则转入(3)基变换。下面给出最优性判别定理。

一般情况下，经过迭代后可以得到以非基变量表示基变量的表达式为

$$x_i=b_i'-\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\tag{1-15}$$

将式(1-15)代入式(1-14)的目标函数，整理后得

$$\max Z=\sum_{i=1}^{m} c_i b_i'+\sum_{i=m+1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij}'\right)x_j$$

令

$$Z_0=\sum_{i=1}^{n} c_i b_i',\quad Z_j=\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ji}'\quad (j=m+1,\cdots,n)$$

于是

$$\max Z=Z_0+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-Z_j)x_j$$

再令

$$\sigma_j=c_j-Z_j\quad (j=m+1,\ \cdots,\ n)$$

则得到以非基变量表示目标函数的表达式为

$$\max Z = Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$$

由以上推导可得出下列最优解的判定定理。

① 最优解的判定定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个基本可行解，且对于一切 $j=m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，称 σ_j 为检验数。

② 无穷多最优解判定定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基本可行解，对于一切 $j=m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多个最优解。

③ 无界解判定定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一基本可行解，有一个 $\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1, 2, \cdots, m$，有 $a_{i,m+k} \leqslant 0$，那么该线性规划问题具有无界解(或称无最优解)。

注意：求目标函数极大化时的情况。当求目标函数极小化时，一种情况如前所述，将其化为标准型。如果不化为标准型，只需在上述①、②中把 $\sigma_j \leqslant 0$ 改为 $\sigma_j \geqslant 0$，在③中将 $\sigma_{m+k}>0$ 改为 $\sigma_{m+k}<0$ 即可。

(3) 基变换。若初始基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是最优解，又不能判别无界时，由目标函数式(1-14)的约束条件可看到，当某些 $\sigma_j>0$，x_j 增加则目标函数值还可能增加，这时就要将其中某个非基变量换到基变量中去(称为换入变量)，同时，某个基变量要换成非基变量(称为换出变量)，随之会得到一个新的基本可行解。从一个基本可行解到另一个基本可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点(如 1.2.1 节图解法)。

确定换入变量的原则是：为了使目标函数值尽快地增加，通常选 $\sigma_j>0$ 中的最大者，即

$$\max(\sigma_j \mid \sigma_j>0)=\sigma_k$$

然后选对应的变量 x_k 为换入变量。

确定换出变量的原则是：保持解的可行性，就是说要使原基本可行解的某一个正分量变成 0。同时要保持其余分量均为非负，这时可按“最小比值原则”选换出变量，即若

$$\min(b_i'/a_{ik}' \mid a_{ik}'>0)=b_l'/a_{lk}'=\theta_l$$

则 θ_l 对应的基变量，x_l 为换出变量。

(4) 迭代。在确定了换入变量 x_k 和换出变量 x_l 之后，要把 x_k 和 x_l 的位置进行对换，即把 x_k 对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k$ 变成单位列向量。这可以通过对约束方程组的增广矩阵进行初等行变换来实现，变换结果得到一个新的基本可行解，然后转入(2)即可。

1.3.3 单纯形表

为了便于理解计算关系，1.3.2 节所述线性规划问题的单纯形法的计算过程可以设计成一个表格，称为单纯形表。

将式(1-15)与目标函数组成 $n+1$ 个变量，$m+1$ 个方程的方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ -Z + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

为了便于迭代运算，可将上述方程组写成增广矩阵：

$$
\begin{array}{cccccccccc}
-Z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & & b \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right]
$$

若将 Z 看成是不参与基变换的基变量，它与 x_1，x_2，…，x_m 的系数构成一个基，这时可采用行初等变换将 c_1，c_2，…，c_m 变换为零，其对应的系数矩阵为单位矩阵。得到

$$
\begin{array}{cccccccc}
-Z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}
\end{array}\right]
$$

可根据上述增广矩阵设计出计算表，见表 1-3。

表 1-3 基本单纯形表

c_j			c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
c_1 c_2 ⋮ c_m	x_1 x_2 ⋮ x_m	b_1 b_2 ⋮ b_m	1 0 ⋮ 0	… … ⋮ …	0 0 ⋮ 1	$a_{1,m+1}$ $a_{2,m+1}$ ⋮ a_{mm}	… … …	a_{1n} a_{2n} ⋮ a_{mn}	θ_1 θ_2 ⋮ θ_m
	$-Z$	$-\sum c_i b_i$	0	…	0	$c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	…	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_{in}$	

说明：表中 $\boldsymbol{X_B}$ 列填入基变量 x_1，x_2，…，x_m；

$\boldsymbol{C_B}$ 列填入基变量的价值系数，这里是 c_1，c_2，…，c_m；

$\boldsymbol{b}$ 列填入约束方程组右端的常数 b_1，b_2，…，b_m；

c_j 行中填入相应各变量的价值系数 c_1，c_2，…，c_n；

θ_i 列的数字是在确定换入变量后，按 θ 规则计算后填入的。

最后一行称为检验数行，是对应各非基变量 x_i 的检验数

$$
\sigma_j = c_i - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n
$$

表 1-3 称为基本单纯形表，每迭代一步构造一个新的单纯形表。一个完整的单纯形表就给出了一个基本可行解。

【例 1.8】 用单纯形表计算例 1.1 的线性规划问题。

解：(1) 根据例 1.1 的标准型，取松弛变量 x_3，x_4，x_5 为基变量，它们对应的系数矩阵(单位矩阵)为基，这就得到初始基本可行解

$$X^{(0)}=(0,\ 0,\ 8,\ 16,\ 12)^{\mathrm{T}}$$

将有关数字填入表中，得到初始单纯形表，见表 1-4。

表 1-4　初始单纯形表

c_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	8	1	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1
c_j-Z_j			2	3	0	0	0

表 1-4 推导基变量的检验数都为零，各非基变量的检验数分别为

$$\sigma_1=c_1-\sum_{i=1}^{3}c_ia_{i1}=2-(0\times1+0\times4+0\times0)=2$$

$$\sigma_2=c_2-\sum_{i=1}^{3}c_ia_{i2}=3-(0\times2+0\times0+0\times4)=3$$

(2) 最优性检验，由于非基变量 x_1，x_2 的检验数 $\sigma_1=2$，$\sigma_2=3$ 都大于零，且其系数列向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 有正分量存在，须转入下一步基变换。

(3) 基变换。确定换入变量和换出变量。

$$\max(\sigma_1,\ \sigma_2)=\max(2,\ 3)=3$$

其对应的非基变量 x_2 为换入变量；

$$\theta=\min(b_i'/a_{ik}'\,|\,a_{ik}'>0)=\min(8/2,\ -,\ 12/4)=3$$

其所在行对应的基变量 x_5 为换出变量。x_2 所在列和 x_5 所在行的交叉处 [4] 称为主元素。

(4) 迭代以 [4] 为主元素进行初等行变换，使 $\boldsymbol{P}_2$ 交换为$(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，在 $\boldsymbol{X}_B$ 列中将 x_2 替换 x_5，于是得到新的单纯形表，见表 1-5。

表 1-5　单纯形表(第一次迭代)

c_j			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	$-1/2$	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	—
c_j-Z_j			2	0	0	0	$-3/4$	

新的基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,\ 3,\ 2,\ 16,\ 0)^{\mathrm{T}}$，对应目标函数值 $Z=9$。

(5) 重复(2)～(4)的计算步骤，得到单纯形表，见表 1-6。

表 1-6 单纯形表(多次迭代)

c_j			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	2	1	0	1	0	$-1/2$	—
0	x_4	8	0	0	-4	1	[2]	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	12
c_j-Z_j			0	0	-2	0	1/4	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	$-1/8$	0	
c_j-Z_j			0	0	$-3/2$	$-1/8$	0	

(6) 表 1-6 中最后一行的所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$，$j=1, 2, \cdots, 5$

于是得到最优解

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^{(3)} = (4, 2, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}$$

目标函数值 $Z^*=14$。

1.4 单纯形法的进一步讨论

1.4.1 人工变量法

在 1.3.2 节中提到确定初始基本可行解的第二种情况：若不存在单位矩阵时，就采用人造基的方法，本节就来详细讨论这个问题。

设线性规划问题的约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b}$$

分别给每个约束方程的左端加入虚设的人工变量 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0, \ x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

即由人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 的系数构成一个 $m \times m$ 单位矩阵，以 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 为基变量，令非基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都等于零，便得到一个初始基本可行解

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = (0, 0, \cdots, 0, b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

因为人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 是为了构造初始基本可行基，人为加入原约束方程中的虚拟变量，只有当它们同时等于零，即在最终单纯形表中它们全部变换为非基变量时，加入人工变量的等式约束才与原约束条件等价。也就是说，若经过基变换，基变量中

不再含有非零人工变量，就表示原问题有解；若经过基变换，最终单纯形表中基变量还存在非零人工变量，就表示原问题无可行解，那么如何处理人工变量呢？下面介绍两种方法。

1. **大 *M* 法**

这种方法是将原问题与加入人工变量后，线性规划问题的等价条件 $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{n+m}=0$。添加原问题的目标函数，使人工变量在目标函数中的系数为$(-M)$或 M(M 为任意大的正数)，使目标函数只有在人工变量等于零时，才能实现最大化或最小化，即在最终单纯形表中，基变量中不存在非零人工变量。

【例 1.9】 用单纯形法求解线性规划问题。

$$\max Z=3x_1-x_2-x_3$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\leqslant 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

解： 在约束条件中分别加入松弛变量、剩余变量、人工变量，进一步整理得到

$$\max Z=3x_1-x_2-x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其中，x_4 是松弛变量；x_5 是剩余变量；x_6、x_7 是人工变量；M 是任意大的正数。单纯形法计算结果见表 1－7。

表 1－7 单纯形表(大 *M* 法)

c_j			**3**	**−1**	**−1**	**0**	**0**	**$-M$**	**$-M$**	**θ_i**
C_B	**X_B**	**b**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
0	x_4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
$-M$	x_6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
$-M$	x_7	1	−2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-Z_j			$3-6M$	$-1+M$	$-1+3M$	0	$-M$	0	0	
0	x_4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	
$-M$	x_6	1	0	[1]	0	0	−1	1	−2	1
c_j			3	−1	−1	0	0	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
−1	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
c_j-Z_j			1	$-1+M$	0	0	$-M$	0	$-3M+1$	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	−2	2	−5	4

（续）

c_j			3	−1	−1	0	0	−M	−M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
−1	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	
−1	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
c_j-Z_j			1	0	0	0	−1	$-M+1$	$-M-1$	
3	x_1	4	1	0	0	1/3	−2/3	2/3	−5/3	
−1	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	
−1	x_3	9	0	0	1	2/3	−4/3	4/3	−7/3	
c_j-Z_j		2	0	0	0	−1/3	−1/3	$-M+1/3$	$-M+2/3$	

从表 1-7 中最终可得最优解为

$$\boldsymbol{X}^*=(4,\ 1,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

目标函数值为

$$Z^*=2$$

2. 两阶段法

两阶段法是处理人工变量的另一种方法，它是将加入人工变量后的线性规划问题分成两个阶段求解。将原问题与加入人工变量线性问题等价条件 $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{n+m}=0$ 添加在第一阶段，并提供给第二阶段一个原问题的可行基。

第一阶段：构造辅助的线性规划问题，不考虑问题解的情况。给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量要求实现最小化的目标函数，即有

$$\min W=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+m}+0x_1+0x_2+\cdots+0x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \cdots,\ x_{n+m}\geqslant 0 \end{cases}$$

其中，x_{n+1}，…，x_{n+m}为人工变量。

然后用单纯形法求解上述构造模型，若得到 $W^*=0$，即所有的人工变量都交换为非基变量，这表明得到了原问题的一个基本可行解，也对应存在原问题的一个可行基，可进入第二阶段；若 $W^*\neq 0$，原问题无可行解，停止计算。

第二阶段：将第一阶段最终计算表格的目标函数换成原问题的目标函数，划去单纯形表中人工变量所在列，即得求原问题的初始单纯形表。用单纯形法进行计算，直至求出最优解。

【例 1.10】 用两阶段法求下列解线性规划问题。

$$\max Z=3x_1-x_2-x_3$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\leqslant 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

解：在约束方程中分别加入松弛变量 x_4、剩余变量 x_5 和人工变量 x_6、x_7，得到第一阶段的数学模型为

$$\min W=x_6+x_7+0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其标准型为

$$\max W'=-x_6-x_7+0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法进行求解，结果见表 1-8。第一阶段构造辅助线性规划问题的最优解是

$$\boldsymbol{X}^*=(0,\ 1,\ 1,\ 12,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

表 1-8 第一阶段单纯形表(两阶段法)

c_j			0	0	0	0	0	−1	−1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
−1	x_6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
−1	x_7	1	−2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-Z_j			−6	1	3	0	−1	0	0	
0	x_4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	
−1	x_6	1	0	[1]	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
c_j-Z_j			0	1	0	0	−1	0	−3	
c_j			0	0	0	0	0	−1	−1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	12	3	0	0	1	−2	2	−5	
0	x_2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	
0	x_3	1	−2	0	1	0	0	0	1	
c_j-Z_j			0	0	0	0	0	−1	−1	

目标函数值为

$$W^*=0$$

因人工变量 $x_6=x_7=0$，所以$(0,\ 1,\ 1,\ 12,\ 0)^{\mathrm{T}}$是原线性规划问题的一个基本可行解。于是可以进行第二阶段运算，即第一阶段最终所得基本可行解可作为原问题的初始基本可行解，单纯形法求解见表 1-9。

表 1-9　第二阶段单纯形表(两阶段法)

c_j			3	−1	−1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	−2	4
−1	x_2	1	0	1	0	0	−1	—
−1	x_3	1	−2	0	1	0	0	—
c_j-Z_j			1	0	0	0	−1	
3	x_1	4	1	0	0	1/3	−2/3	
−1	x_2	1	0	1	0	0	−1	1
−1	x_3	9	0	0	1	2/3	−4/3	
c_j-Z_j			0	0	0	−1/3	−1/3	

从表 1-9 可得到原线性规划问题的最优解为

$$\boldsymbol{X}^*=(4,\ 1,\ 9,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

目标函数值

$$Z^*=2$$

1.4.2　单纯形法的矩阵描述

现在介绍用矩阵来描述单纯形法的计算过程，它有助于加深对单纯形法和对偶理论等的理解，也有助于改进单纯形法。

设线性规划问题已化成如下的标准型

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{O}\end{cases}\tag{1-16}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_n]=[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N}]$$

为不失一般性，设 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_m]$ 为基，$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{P}_{m+1},\ \boldsymbol{P}_{m+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_n]$ 为非基变量系数构成的矩阵。$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{X_B},\ \boldsymbol{X_N})^{\mathrm{T}}$，这里 $\boldsymbol{X_B}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^{\mathrm{T}}$ 为基变量构成的向量。

$\boldsymbol{X_N}=(x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 为非基变量构成的向量。$\boldsymbol{C}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)=(\boldsymbol{C_B},\ \boldsymbol{C_N})$，其中 $\boldsymbol{C_B}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$，$\boldsymbol{C_N}=(c_{m+1},\ c_{m+2},\ \cdots,\ c_n)$，从而有

$$(C_B, C_N)\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=C_BX_B+C_NX_N$$

则式(1-16)改写为

$$\max Z=C_BX_B+C_NX_N \tag{1-17}$$

$$\begin{cases}BX_B+NX_N=b\\X_B, X_N\geqslant O\end{cases} \tag{1-18}$$

将式(1-18)移项后得

$$BX_B=b-NX_N \tag{1-19}$$

式(1-19)左乘 B^{-1}后，得到 X_B 的表达式为

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N \tag{1-20}$$

将式(1-20)代入目标函数(1-17)，得到

$$Z=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N$$

若令非基变量 $X_N=0$，得到一个基本可行解为

$$X=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$$

目标函数为

$$Z^*=C_BB^{-1}b$$

从式(1-20)和目标函数表达式可以得出以下几点。

(1) 非基变量的系数$(C_N-C_BB^{-1}N)$就是非基变量的检验数 σ_N；由此再来看基变量的检验数 $\sigma_B=C_B-C_BB^{-1}B=0$，与单纯形法中结论一致，因此所有的检验数可用 $C-C_BB^{-1}A$ 表示，即检验数的矩阵描述。

(2) 只要求出基的逆矩阵 B^{-1}，就可知系数增广矩阵基变化的结果：系数列向量为 $B^{-1}P$；资源向量为 $B^{-1}b$。因此。θ 规则的矩阵表达式为

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_j)_i}\,\middle|\,(B^{-1}P_j)_i>0\right\}=\frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_j)_l}$$

其中，$(B^{-1}b)_i$ 是向量$(B^{-1}b)$中第 i 个元素；$(B^{-1}P_j)_i$ 是向量$(B^{-1}P_j)$中第 i 个元素。

(3) 令 $Y=C_BB^{-1}$称为单纯形乘子，则有

$$Z=Yb+(C-YA)X$$

1.4.3 改进单纯形法

从 1.4.2 节单纯形法的矩阵描述中可以看到，在单纯形法迭代时，每迭代一步的关键在于求出 $B^{-1}b$，通过 B^{-1}，可求得对应于基 B 的基本可行解 $X=(B^{-1}b)$(基中非基变量都等于零)，目标函数 $Z=C_BB^{-1}b$ 及用于最优性判断的检验数构成的向量 $\sigma_N=(C_N-C_BB^{-1}N)$，这就是单纯形法的出发点。

设当前基为 $B=(P_1, P_2, \cdots, P_{l-1}, P_l, \cdots, P_m)$，基变换中要用非基变量 X_k 替换基变量 X_l，基变换后的新基为 B_1，在 B 和 B_1 之间只差一个变量，如何只根据 B_1 和换入变量 X_k 的系数列向量来计算出 B^{-1}呢？由前面单纯形法基变换中可得到下列关系式：

$$B_1^{-1}=EB^{-1} \tag{1-21}$$

其中

$$E=(e_1, \cdots, e_{l-1}, \xi, e_{l+1}, \cdots, e_m)$$

$$\xi=[-a_{1k}/a_{lk}, -a_{2k}/a_{lk}, \cdots, -a_{(l-1)k}/a_{lk}, 1/a_{lk}, -a_{(l+1)k}/a_{lk}, \cdots, -a_{mk}/a_{lk}]^{\mathrm{T}} \tag{1-22}$$

e_i表示第 i 个位置的元素为 1，其他元素均为 0 的单位列向量。

$\boldsymbol{P}_k=(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{(l-1)k}, a_{lk}, a_{(l+1)k}, \cdots, a_{mk})$是 $\boldsymbol{B}$ 对应的换入变量的系数向量。

那么改进单纯形法的计算步骤如下。

(1) 由线性规划问题的标准型确定初始基矩阵的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$。求出初始基本可行解 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})$，计算出相应目标函数值 $Z=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。

(2) 最优解检验。计算非基变量检验数 σ_N，$\sigma_N=(\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})$。若 $\sigma_N\leqslant 0$，已得到最优解，可停止计算；若还存在 $\sigma_j>0$，$j\in N$，则转入下一步计算。

(3) 根据 $\max(\sigma_j|\sigma_j>0)=\sigma_k$所对应的非基变量 x_k 为换入变量，计算$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k)$。若$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k)\leqslant 0$，那么原线性规划问题无解，停止计算。否则，进行下一步计算。

(4) 根据 θ 规则，求出

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_k)_i}\,\middle|\,(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i>0\right\}=\frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_l}$$

它对应的基变量 x_l 为换出变量，然后进行下一步计算。

(5) 用 $\boldsymbol{P}_k$ 代替当前基中的 $\boldsymbol{P}_l$ 得一新基 $\boldsymbol{B}_1$。再根据式(1-22)计算 $\boldsymbol{E}$，由式(1-21)求出 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$。计算新的基本可行解 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}$，重复(2)～(5)步骤。

由于在初始单纯形表中，$\boldsymbol{B}^{-1}$是单位矩阵，因而在改进单纯形法的整个计算过程中，就不需要再计算基的逆矩阵。

1.5 线性规划应用举例

1.5.1 生产计划问题

该问题的一般提法是：用若干种资源 B_1，B_2，…，B_m，生产若干产品 A_1，A_2，…，A_m，资源供应有一定限制，要求制订一个产品生产计划，使其在资源限制条件下，得到最大效益。

这个问题的已知条件见表 1-10。

表 1-10 产品资源限制条件

产品 / 单位产品所需资源 / 资源	A_1, A_2, …, A_n	可供应资源量
B_1	a_{11}, a_{12}, …, a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}, a_{22}, …, a_{2n}	b_2
…	…	…
B_m	a_{m1}, a_{m2}, …, a_{mn}	b_m
单位产品所得利润	c_1, c_2, …, c_m	

【**例 1.11**】 例 1.1 就属于这一类生产计划问题，所以很容易写出其线性规划模型。

解：设 x_j 表示生产 A_j 种产品的计划数，$j=1$，2，…，n。则有

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \\ x_j \geqslant 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

1.5.2 人力资源配置问题

该问题的一般提法是：一项工作根据其特点在不同的时间段，采用不同的工作人员完成。问如何安排工作人员的作息，才能既满足工作需要，又使配备人员的数量最小。

【例 1.12】 某大都市有一昼夜服务的公交线路，经长时间的统计观察，每天各时段所需要的司乘人员数，见表 1-11。

表 1-11 司乘人员需求信息

班次	时间区间	所需人数/人
1	6：00～10：00	60
2	10：00～14：00	70
3	14：00～18：00	60
4	18：00～22：00	50
5	22：00～2：00	20
6	2：00～6：00	30

设司乘人员分别在每时段准时上班，并连续工作 8h，问公交公司应如何安排这条公交线路的司乘人员，才能既满足工作需要，又使配备的司乘人员最少？

解：设用 x_i 表示第 i 班开始上班的司乘人员数，由于每班实际上班的人数中必包括前一班的人数，于是可建立如下线性规划模型

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_6 \geqslant 60 \\ x_1 + x_2 \geqslant 70 \\ x_2 + x_3 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 50 \\ x_4 + x_5 \geqslant 20 \\ x_5 + x_6 \geqslant 30 \\ x_i \geqslant 0 (i=1, 2, \cdots, 6) \end{cases}$$

求解之后得到 $x_1=50$，$x_2=20$，$x_3=50$，$x_4=0$，$x_5=20$，$x_6=10$，$Z=150$。

【例 1.13】 某商场对一周内的顾客流量进行统计分析后，按照服务定额得知一周中每天售货人员需求量，见表 1-12。

表 1-12 售货人员需求信息

时间	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
售货人员/人	28	15	24	25	19	31	28

现在的问题是，售货员每周工作 5 天，休息 2 天，并要求休息时间是连续的，商场应如何安排售货人员的作息，才能够既满足工作需要，又使配备的售货人员最少？

解： 设 x_i 为星期 i 开始休息的人数，星期日记为 x_7，则每一天工作的人数应为下一日开始休息的人员直至由下一日算起的第 5 个工作日，即当日前天（不是昨天，昨天开始休息的人员休息时间会延至当日）休息的人员总和。于是，根据资料可建立如下的线性规划模型

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 28 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 15 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 24 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 25 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 19 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant 31 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant 28 \\ x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \cdots, 7) \end{cases}$$

求解之后得到 $x_1 = 12$，$x_2 = 0$，$x_3 = 11$，$x_4 = 5$，$x_5 = 0$，$x_6 = 8$，$x_7 = 0$，$Z = 36$。

1.5.3 套裁下料问题

这类问题一般提法是：在加工业中，需要将某类规格的棒材或板材裁成不同规格的毛坯，对裁出的毛坯有一定的数量要求。问如何裁取，才能既满足对裁出毛坯的数量要求，又使所使用的原材料最少。

【例 1.14】 某工厂计划做 100 套钢架，需要用长度分别为 2.9m、2.1m 和 1.5m 的圆钢各一根。已知可做原料使用的圆钢每根长 7.4m，问应如何下料才能使所用原料最省？

解： 最简单的下料方法是，每根圆钢截取 2.9m、2.1m 和 1.5m 的长度各一根，组成一套，这样每根圆钢剩下料头 0.9m。完成任务后，共消耗圆钢 100 根，余下的料头共 90m。若改成套裁方法，即可先设计出几个较好的下料方案。所谓较好即第一要求是每个方案下料后的料头较短，第二要求是所有的方案配合起来能满足完成任务的需要。为此，可设计 5 种方案供参考使用，见表 1-13。

表 1-13 下料方案信息 单位：m

方案 / 圆钢	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了用最少的原材料得到 100 套钢架，必须混合使用上述各种下料方案。设使用每一种方案下料的圆钢根数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，则可得到如下的线性规划模型：

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad + \ x_4 \qquad \geqslant 100 \\ \qquad\qquad 2x_3+2x_4+x_5 \geqslant 100 \\ 3x_1+\ x_2+2x_3+ \qquad 3x_5 \geqslant 100 \\ x_i \geqslant 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5) \end{cases}$$

求解之后得到 $x_1=30$，$x_2=10$，$x_3=0$，$x_4=50$，$x_5=0$，总共需圆钢 90 根。该模型的目标函数也可以是 $\min Z=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$，求解后得 $Z=16$。

1.5.4 配料问题

这类问题的一般提法是：由多种原料制成含有 m 种成分的产品，已知产品中所含各种成分的最低需要量及各种原料的单价，并且知道各种原料的数量，问应如何配料，才能使产品的成本最低。

【例 1.15】 某工厂要用 3 种原料 A、B、C 混合调配 3 种产品甲、乙、丙，已知产品的规格要求及单价，原材料的单价和每天的供应量见表 1-14。问该厂应如何安排生产，才能使利润收入最大?

表 1-14 产品及原料信息

产品及原材料	产品规格及原材料可供量	单价/(元/千克)
甲	原料 A 不少于 50%，原料 B 不超过 25%	50
乙	原料 A 不少于 25%，原料 B 不超过 50%	35
丙	原料无具体要求	25
A	100	65
B	100	25
C	60	35

解：这一问题需要使用双下标变量。可设 x_{ij} 表示第 i 种产品第 j 种原料的含量，于是可得到如下线性规划模型

$$\max Z=50(x_{11}+x_{12}+x_{13})+35(x_{21}+x_{22}+x_{23})+25(x_{31}+x_{32}+x_{33})$$
$$-65(x_{11}+x_{21}+x_{31})-25(x_{12}+x_{22}+x_{32})-35(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

即 $$\max Z=-15x_{11}+25x_{12}+15x_{13}-30x_{21}+10x_{22}-40x_{31}-10x_{33}$$

(1) 产品规格约束为

$$\begin{cases} x_{11} \geqslant 0.5(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\ x_{12} \leqslant 0.25(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\ x_{21} \geqslant 0.25(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \\ x_{22} \leqslant 0.5(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \end{cases}$$

(2) 原材料可供量约束为

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31} \leqslant 100 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \leqslant 100 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \leqslant 60 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

求解后得到 $x_{11}=100$，$x_{12}=50$，$x_{13}=50$，其余的 $x_{ij}=0$。得到这样的解是因为每一种产品生产多少没有限制，且原材料的约束为“$\leqslant$”型。如果加上每一种产品的最低生产

量限制，并将原材料可供量约束改为等式约束，则求解结果一定不是这样。

1.6 应 用 案 例

美洲银行网络交易服务问题①

罗伯认为区别于对手的一个对策是提供竞争对手所没有提供的服务——交易服务。他确定，在自动取款机之后又会有一种便利的交易方法，这种方法就是通过网络的电子银行。通过网络，客户可以直接用家里和办公室里的台式计算机来进行交易。网络的大发展，已经使许多人懂得如何使用万维网。这样，他总结出，如果美洲银行能够提供网络上的银行交易的，可能会吸引许多新的消费者。

在罗伯决定开发网上业务之前，他必须知道网络银行的市场及美洲银行可以通过网络提供的服务。例如，客户是否只能通过网络查询账户及交易信息，还是可以获得存取服务？银行是否需要提供实时的股价行情，以及收取很少的一笔手续费而允许客户在网上下订单，以吸引一部分投资市场上的客户？

因为美洲银行没有从事调研业务，所以决定将这一调研项目交给一个专业的咨询公司。该项目收到了好几个咨询公司的投标，罗伯将选择了成本最小的一个公司。罗伯为咨询公司列出了一系列的调研要求，以确保公司能够获得实行该策略所需要的信息。

因为不同年龄段的人需要不同的服务，美洲银行对4个年龄段的人有兴趣：第一类为18～25岁，这些人的收入有限，交易量不会很大；第二类为26～40岁，这些人收入可观，交易量大，需要大量的住房和汽车贷款，并会在各类证券上投资；第三类为41～50岁，这类人与第二类的收入与行为类似，但因为这些人还不适应网络上的计算机大爆炸，因此不大可能使用网络银行；最后，第四类是51岁以上，这些人渴望安全，并且对希望获得退休基金的信息，银行相信这些人是绝对不会使用网络交易的，但银行也希望能够进一步获得这些人的需求信息。美洲银行将会调研2000名客户，其中，第一年龄段至少占20%，第二类占27.5%，第三类占15%，第四类占15%。

罗伯知道网络是近期才发展起来的，一些人甚至还不知道什么是万维网。因此他希望能够知道哪些人使用网络，而哪些人不使用网络。为了保证美洲银行能够获得准确的组合，他要求被调研的人中至少15%来自网络普遍使用的硅谷地区，而35%来自大城市，那些地方网络的使用程度一般，20%来自很少使用计算机的小城镇。

精致调研公司(Sophisticated Surveys)是投标该项目的3家调研公司中的一家，该公司对调研的成本做了初步的估计，每人的调研费用如表1-15所示。

表1-15 调研的成本调研费用信息

地区	年龄段			
	18～25	26～40	41～50	51以上
硅谷	$4.75	$6.50	$6.50	$5.00
大城市	$5.25	$5.75	$6.25	$6.25
小城镇	$6.50	$7.50	$7.50	$7.25

精致调研公司对下面几个问题进行了连续的探讨。

建立线性规划模型，在满足美洲银行的调研要求的基础上使成本最小。

如果精致调研公司边际收益是总成本的15%，它们的投标将是多少？

在提交了投标书以后，精致调研公司得到通知说，它的标价是最低的，但美洲银行不认同它的结果，罗伯要求被调研的每一个地区每一个年龄段的人数必须超过50人，这样的话，精致调研公司新的标价将是多少？

罗伯认为精致调研公司对18～25岁年龄段及硅谷地区的取样太多了，因此，他增加了一个新的约束，即18～25岁之间的被调研的人数不能超过600人，而硅谷地区的人数不能超过650人，这样，新的标价又将如何？

在计算调研成本时，精致调研公司认识到，对年轻人的调研较为容易。然而，在近期完成的一个调研报告中显示，这个假设是不正确的。对18～25岁间的人的调研成本见表1-16，在新的成本下，标价将会是多少？

表1-16 调研城市成本信息

地区	每人的成本($)	地区	每人的成本($)
硅谷	6.5	小城镇	7
大城市	6.75		

为了保证所要求的取样，罗伯做出了更严格的约束，规定各类人数的比例必须符合表1-17。

表1-17 调研人群比例信息

人群	调查的人群比例(%)	人群	调查的人群比例(%)
18～25	25	硅谷	20
26～40	35	大城市	50
41～50	20	小城镇	30
51以上	20		

在这些限制的条件下，精致调研公司的调研成本将增加多少？若以总成本的15%提取边际收益，精致调研公司的报价又将是多少？

注：①深圳大学《运筹学》精品课工程案例。

习　　题

1. 线性规划的数学模型有哪些特点？
2. 线性规划问题的解有哪几种形式？
3. 简述单纯形法的求解步骤。
4. 在单纯形法中，大M法与两阶段法有哪些异同点？
5. 将下列线性规划模型转化为标准型。

(1) $\max Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 \geqslant 7 \\ x_1, x_3 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

(2) $\min Z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

6. 用图解法求解下列线性规划问题。

(1) $\min Z = -x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max Z = -x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max Z = 3x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max Z = 3x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + x_2 \leqslant -5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基本解，指出哪些是基本可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1) $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \geqslant 0 \end{cases}$$

8. 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上的哪个顶点。

(1) $\max Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max Z = 2x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

9. 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题。

(1) $\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geqslant 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max Z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leqslant 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6 \\ -2x_1 + x_3 \geqslant 2 \\ 2x_2 - x_3 \geqslant 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

10. 用改进单纯形法求解以下线性规划问题。

(1) $\max Z=4x_1+2x_2$

$$\begin{cases}-x_1+x_2\leqslant 6\\ x_1+x_2\leqslant 9\\ 3x_1-x_2\leqslant 15\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min Z=2x_1+x_2$

$$\begin{cases}3x_1+\ x_2=3\\ 4x_1+3x_2\geqslant 6\\ x_1+2x_2\leqslant 3\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

11. 表 1-18 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表，表中无人工变量，a_1，a_2，a_3，d，c_1，c_2为待定常数，试说明这些常数分别取何数时以下结论成立。

表 1-18　单纯形表

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4	2	-1	-3	0	1	-1	0
x_6	3	a_3	-5	0	0	-4	1
c_j-Z_j		c_1	c_2	0	0	-3	0

(1) 表中解为唯一最优解。

(2) 表中解为最优解，但存在无穷多最优解。

(3) 该线性规划问题具有无界解。

(4) 表中的解非最优，为了改进，设换入变量为 x_1，换出变量为 x_6。

12. 某糖果厂用原料 A、B、C 加工成 3 种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A、B、C 的含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，3 种牌号糖果的单位加工费及售价见表 1-19。问该厂每月应生产这 3 种牌号糖果各多少千克，才能使该厂获利最大？试建立这个问题的线性规划的数学模型。

表 1-19　产品加工信息

原料含量　产品 原料	甲	乙	丙	原料成本/(元/千克)	每月限制用量/(千克)
A	≥60%	≥15%		2.00	2000
B				1.50	2500
C	≤20%	≤60%	≤50%	1.00	1200
加工费/(元/千克)	0.50	0.40	0.30		
售价/(元/千克)	3.40	2.85	2.25		

13. 某厂生产 3 种产品甲、乙、丙。每种产品要经过 A、B 两道工序加工，设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序，它们以 A_1、A_2表示；有 3 种规格的设备能完成 B 工序，它们以 B_1、B_2、B_3表示，产品甲可以在 A、B 任何一种规格设备上加工。产品乙可以在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品丙只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费、产品销售价格、各种设备有效台时及满负荷操作时机床设备的费用见表 1-20，要求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

表 1-20 产品加工信息

设备	产品			设备有效台时	满负荷时机床设备费用/元
	甲	乙	丙		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12.	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11.	7000	783
B_3	7			4000	200
原料费/(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单价/(元/件)	1.25	2.00	2.80		

关键词及其英文对照

线性规划	liner programming	决策变量	decision variable
基变量	basic variable	松弛变量	slack variable
剩余变量	surplus variable	目标函数	objecctive function
约束	constraint	约束条件	constraint condition
可行解	feasible solution	基本解	basic solution
基本可行解	feasible basic solution	最优解	optimum solution
可行域	feasible region	图解法	graphical solution
顶点	vertices	迭代	iteration
单纯形法	simplex method	改进单纯形法	modified simplex method

第 2 章　对偶规划与灵敏度分析

本章内容分为两大部分：对偶规划与灵敏度分析。对偶规划是线性规划问题从另一个角度进行的研究，是线性规划理论的进一步深化，也是线性规划理论整体的一个不可分割的组成部分。灵敏度分析是对线性规划结果的再发掘，是对线性规划理论的充分利用。通过本章的学习，要求能够写出任意一个线性规划问题的对偶问题，并能应用对偶单纯形法解决相应的线性规划问题，同时能对线性规划的求解结果进行多种情况的灵敏度分析。

2.1　线性规划的对偶问题及其数学模型

2.1.1　对偶问题的提出

在例 1.1 中讨论了工厂生产计划线性规划问题的数学模型及其解法，其数学模型为

$$\max Z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \leqslant 16 \\ \qquad\quad 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

现在从另一个角度来讨论这个问题。假设该工厂的决策者决定不自己生产产品，而是将其具有的所有资源出租或外售，这时工厂的决策者就要考虑如何给每种资源定价的问题。

设出租单位的设备台时的租金和出让单位原材料 A、B 的附加额分别为 y_1、y_2、y_3，那么，该工厂应满足下列两个条件。

（1）出租生产单位产品Ⅰ所消耗的设备台时和原材料的出租出让的所有收入应不低于自己组织生产该产品所获得的利润，即

$$y_1+4y_2\geqslant 2$$

（2）出租生产单位产品Ⅱ所消耗的设备台时和原材料的出租出让的所有收入应不低于自己组织生产该产品所获得的利润，即

$$2y_1+4y_2\geqslant 3$$

则工厂所有资源出租出让的总收入为

$$\omega=8y_1+16y_2+12y_3$$

从工厂决策者的角度来看，当然 ω 值越大越好；但从接受方的角度来看，支付越少越好。所以，工厂的决策者只能在满足将设备台时和原材料的出租出让的所有收入不低于自己组织生产该产品所获得的利润的条件下，使其总收入尽可能的小，这样才能使接受方接受，工厂才能实现其意愿，为此需求解如下线性规划问题。

$$\min\omega=8y_1+16y_2+12y_3$$

$$\begin{cases} y_1+4y_2 \geqslant 2 \\ 2y_1+4y_3\geqslant 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0 \end{cases}$$

称这个线性规划问题为例 1.1 线性规划原问题 P 的对偶问题 D。

同理，例 1.2 的线性规划问题的对偶问题就是将安装 A、B、C 这 3 种构件的工程项目分包给承包商，如何确定工程承包费。

设安装一根 A、B、C 构件的承包费分别为 y_1，y_2，y_3，则该对偶问题的数学模型为

$$\max\omega=250y_1+300y_2+700y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1+8y_2+10y_3\leqslant 250 \\ 6y_1+6y_2+20y_3\leqslant 350 \\ y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0 \end{cases}$$

该对偶问题的经济意义可解释为：工程投资方不自己组织安装，而是分包给承包商，在满足承包费不能大于自己安装时租赁安装机械的租赁费条件下，尽可能使承包费最大，这样承包商才能接受。

2.1.2 对偶问题的数学模型

在 1.4.2 节中线性规划单纯形法的矩阵描述有定义单纯形乘子 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$，对线性规划原问题 P，有

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{cases}$$

最优解标准为所有变量的检验数 $\sigma\leqslant 0$，即 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$，有 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA}\leqslant 0$，得

$$\boldsymbol{YA}\geqslant 0 \tag{2-1}$$

对于松弛变量 X_S，其系数矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，价格向量为 0，即有

$$\sigma_S=\boldsymbol{C}_S-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}\leqslant 0$$

得

$$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\geqslant 0$$

即有

$$\boldsymbol{Y}\geqslant 0 \tag{2-2}$$

对 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ 两边右乘 $\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{Yb}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=Z$$

因为 $\boldsymbol{Y}\geqslant 0$，要使 Z 有最大值，$\boldsymbol{Yb}$ 只能存在最小值，即有

$$\min\omega=\boldsymbol{Yb} \tag{2-3}$$

式(2-1)、式(2-2)、式(2-3)构成线性规划原问题 P 的对偶问题 D 的数学模型：

$$\min\omega=\boldsymbol{Yb}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{YA}\geqslant \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{Y}\geqslant 0 \end{cases}$$

同理，线性规划原问题 P 为

$$\min Z=\boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{cases}$$

其对偶问题 D 为

$$\max\omega=\boldsymbol{Yb}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{YA}\leqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}\leqslant 0\end{cases}$$

上述两种对偶模型称为对称型模型。另外，还有一种原问题约束为等式或变量为无约束变量的对偶模型称为非对称型模型，线性规划原问题 P 为

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

这种非对称型模型对偶关系的处理步骤如下。

(1) 先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件，则 P 可表示为

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

即有

$$\max Z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b} & (1)\\ -\boldsymbol{AX}\leqslant-\boldsymbol{b} & (2)\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

$\boldsymbol{Y}'=(y_1', y_2', \cdots, y_m')$是对应约束条件(1)的对偶变量。

$\boldsymbol{Y}''=(y_1'', y_2'', \cdots, y_m'')$是对应约束条件(2)的对偶变量。

(2) 按对称型变换关系可写出它的对偶问题，有

$$\min\omega=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{Y}''\boldsymbol{b})$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{Y}''\boldsymbol{A})\geqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}',\ \boldsymbol{Y}''\geqslant 0\end{cases}$$

整理为

$$\min\omega=(\boldsymbol{Y}'-\boldsymbol{Y}'')\boldsymbol{b}$$
$$\begin{cases}(\boldsymbol{Y}'-\boldsymbol{Y}'')\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}',\ \boldsymbol{Y}''\geqslant 0\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}'-\boldsymbol{Y}''$，$\boldsymbol{Y}'$，$\boldsymbol{Y}''\geqslant 0$，由此可见 $\boldsymbol{Y}$ 不受正、负限制。用 $\boldsymbol{Y}$ 代替后原问题的对偶问题 D 得

$$\min\omega=\boldsymbol{Yb}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y}\ \text{无约束}\end{cases}$$

2.1.3 原问题与对偶问题的对应关系

必须指出，当讨论对偶问题时，它必定是与原问题成对出现的；同时，原问题与对偶问题之间没有严格的界线，它们互为对偶：一个是原问题，则另一个就为对偶问题。表 2-1 给出了线性规划原问题与对偶问题的对应关系，该表也可以看成是一个线性规划原问题转

化为对偶问题的一般规律。其中，对于变量与约束间关系的理解，必须考虑到对偶模型的约束与原问题模型的变量相对应，变量则是与原问题模型的约束相对应。如原问题是最小化，则可将对偶问题成看是原问题。

表 2-1　线性规划问题对偶关系

原问题(或对偶问题)	对偶问题(或原问题)
目标函数最大化(max$Z$)	目标函数最小化(minω)
n 个变量 m 个约束 约束条件的资源向量(右端项) 目标函数的价格向量(系数)	n 个约束 m 个变量 目标函数的价格向量 约束条件的资源向量
变量$\begin{cases}\geqslant 0\\ \leqslant 0\\ \text{无约束}\end{cases}$	约束$\begin{cases}\text{“}\geqslant\text{” 形式}\\ \text{“}\leqslant\text{” 形式}\\ \text{“}=\text{” 形式}\end{cases}$
约束$\begin{cases}\text{“}\geqslant\text{” 形式}\\ \text{“}\leqslant\text{” 形式}\\ \text{“}=\text{” 形式}\end{cases}$	变量$\begin{cases}\leqslant 0\\ \geqslant 0\\ \text{无约束}\end{cases}$

关于变量与约束之间的关系，一个简单的记忆方法是：正常对正常，反常对反常。首先，正常情况下，线性规划问题的所有变量都应是大于或等于 0 的；其次，最大化问题的约束都应是“≤”形式的，而最小化问题的约束都应是“≥”形式的。所谓“正常对正常，反常对反常”就是说，只要原问题模型中的变量和约束都符合这些规律，则对偶问题模型中的变量和约束也一定符合这些规律；如果原问题模型中的变量和约束违反这些规律，则对偶问题模型中的变量和约束也一定违反这些规律。

【例 2.1】 试求下列线性规划问题的对偶问题。

$$\min Z=2x_1+3x_2-5x_3+x_4$$
$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3+x_4\geqslant 5 & ①\\ 2x_1+2x_3-x_4\leqslant 4 & ②\\ x_2+x_3+x_4=6 & ③\\ x_1\leqslant 0;\ x_2,\ x_3\geqslant 0;\ x_4\text{无约束}\end{cases}$$

解：设对应于约束条件①、②、③的对偶变量分别为 y_1、y_2、y_3，则由表 2-1 中原问题与对偶问题的对应关系，可以直接写出上述线性规划问题的对偶问题，有

$$\max\omega=5y_1+4y_2+6y_3$$
$$\begin{cases}y_1+2y_2\geqslant 2\\ y_1+y_3\leqslant 3\\ -3y_1+2y_2+y_3\leqslant -5\\ y_1-y_2+y_3=1\\ y_1\geqslant 0,\ y_2\leqslant 0,\ y_3\text{无约束}\end{cases}$$

当然，也可依对偶问题写出原问题。

2.2 线性规划的对偶理论

线性规划的对偶理论包括以下几个主要的基本定理。

定理 2-1(对称性定理) 对偶问题的对偶是原问题。

这一定理的内涵显而易见，证明从略。

定理 2-2(弱对偶定理) 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别是原问题 P 和对偶问题 D 的可行解，则必有 $\boldsymbol{CX} \leqslant \boldsymbol{Yb}$。

证： 由 P 和 D 的约束条件：$\boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{X} \geqslant 0$，$\boldsymbol{Y} \geqslant 0$，不难得到

$$\boldsymbol{YAX} \leqslant \boldsymbol{Yb}, \quad \boldsymbol{YAX} \geqslant \boldsymbol{CX}$$

则有

$$\boldsymbol{CX} \leqslant \boldsymbol{YAX} \leqslant \boldsymbol{Yb}$$

即

$$\boldsymbol{CX} \leqslant \boldsymbol{Yb}$$

该定理说明，原问题 P 的最大目标函数值绝不大于对偶问题 D 的最小目标函数值。这就给出了线性规划原问题与对偶问题之间界的关系：若原问题 P 可行，其任意可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应的目标函数值 $\boldsymbol{CX}$ 就提供了相应对偶问题 D 的目标函数值的一个下界；反之，若对偶问题可行，它的任意可行解 $\boldsymbol{Y}$ 对应目标函数值 $\boldsymbol{Yb}$ 则提供了其对应原问题 P 的目标函数值的一个上界。

定理 2-3(对偶原理) 原问题 P 与对偶问题 D 存在如下对应关系。

(1) P 有最优解的充要条件是 D 有最优解。

(2) 若 P 无界则 D 不可行，若 D 无界则 P 不可行。

(3) 若 $\boldsymbol{X}^*$ 和 $\boldsymbol{Y}^*$ 分别是 P 和 D 的可行解，则它们分别为 P 和 D 的最优解的充要条件是 $\boldsymbol{CX}^* = \boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}$。

证： 对应关系(1)

先证必要性。由 $\boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}$，得

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}) \geqslant (\boldsymbol{C_B}, \boldsymbol{C_N})$$

即

$$(\boldsymbol{YB}, \boldsymbol{YN}) \geqslant (\boldsymbol{C_B}, \boldsymbol{C_N})$$

有 $\boldsymbol{YB} \geqslant \boldsymbol{C_B}$，两边右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{Y} \geqslant \boldsymbol{C_B B}^{-1}$$

由于对偶问题 D 属最小化问题，所以 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C_B B}^{-1}$ 必为对偶问题的最优解(这一结论也称为单纯形乘子的对偶定理)。

设 $\boldsymbol{X}^*$ 是 P 的最优解，$\boldsymbol{B}$ 是最优基，则由 P 的最优解条件 $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C_B B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant 0$ 和 $\boldsymbol{C_B B}^{-1} \geqslant 0$，令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C_B B}^{-1}$，得 $\boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{Y} \geqslant 0$，显然 $\boldsymbol{Y}$ 是 D 的一个可行解。再根据弱对偶定理，有 $\boldsymbol{CX}^* \leqslant \boldsymbol{Yb}$，即最小化问题 D 必存在一个下界，换言之，$\min \boldsymbol{Yb}$ 必存在最优解。

充分性。由对称性定理即可得到证明。

证： 对应关系(2)

用反证法。假定 P 无界但一定有可行解，根据弱对偶定理，对于 P 的一切可行解均有 $\boldsymbol{CX} \leqslant \boldsymbol{Yb}$，这表明 P 有上界，这与 P 无界的假设相矛盾。同时，根据弱对偶定理，若 P 无界，则 D 必无下界，因 D 属最小化问题，故必无可行解。

证： 对应关系(3)

① 必要性。设 $\boldsymbol{X}^*$ 是 P 的最优解，$\boldsymbol{B}$ 是最优基，由弱对偶定理知：若 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ 是 D 的可行解，就有 $\boldsymbol{CX}^*\leqslant\boldsymbol{Yb}$，由此不等式知若 $\boldsymbol{Yb}$ 存在最小值，其最小值为 $\boldsymbol{CX}^*$；又根据定理 2-3(1)相应对偶问题 D 有最优解 $\boldsymbol{Y}^*$，即 $\boldsymbol{Yb}$ 必存在最小值 $\min\boldsymbol{Yb}=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{CX}^*=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}$。

② 充分性。设 $\boldsymbol{X}^*$ 和 $\boldsymbol{Y}^*$ 分别是 P 和 D 的可行解，且满足 $\boldsymbol{CX}^*=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}$，于是根据弱对偶定理，对于 P 的任何可行解 $\boldsymbol{X}$，存在 $\boldsymbol{CX}\leqslant\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{CX}^*$，由于 P 属最大化问题，故 $\boldsymbol{CX}^*$ 必为最优值，即 $\boldsymbol{X}^*$ 为最优解。同理可证，$\boldsymbol{Y}^*$ 也是 D 的最优解。

定理 2-4(互补松弛定理) 如果 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别为 P 和 D 的可行解，它们分别为 P 和 D 的最优解的充要条件是 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA})\boldsymbol{X}=0$ 和 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX})=0$。

证：

(1) 必要性。对于对称型对偶问题，引入松弛变量 $\boldsymbol{X}_S\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{Y}_S\geqslant 0$ 后，P 和 D 的约束方程变为

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{YA}-\boldsymbol{Y}_S=\boldsymbol{C}$$

即有
$$\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX},\quad \boldsymbol{Y}_S=-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA})$$

经变换得
$$\boldsymbol{YX}_S=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}),\quad \boldsymbol{Y}_S\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA})\boldsymbol{X}$$

若 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 要为最优解，由定理 2-3 得 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{Yb}$，则有 $(\boldsymbol{YA}-\boldsymbol{Y}_S)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}_S)$，即 $\boldsymbol{YX}_S+\boldsymbol{Y}_S\boldsymbol{X}=0$，也就是 $\boldsymbol{YX}_S=0$，$\boldsymbol{Y}_S\boldsymbol{X}=0$。所以有 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA})\boldsymbol{X}=0$，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX})=0$

(2) 充分性。设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别为 P 和 D 的可行解，且满足 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA})\boldsymbol{X}=0$ 和 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX})=0$，即得 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{YAX}=\boldsymbol{Yb}$。

由对偶定理 2-3(3)知，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 必是 P 和 D 的最优解。

互补松弛定理也称松紧定理，它描述了线性规划问题达到最优时，原问题(或对偶问题)的变量取值和对偶问题(或原问题)约束的松紧性之间的对应关系。在一对互为对偶的线性规划问题中，原问题的变量和对偶问题的约束是一一对应的，原问题的约束和对偶问题的变量也是一一对应的。当线性规划问题达到最优时，不仅可以同时得到原问题与对偶问题的最优解，而且还可以得到变量与约束之间的一种对应关系。互补松弛定理即揭示了这一点。

互补松弛定理中的条件也可以等价地表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{YX}_S=0\\ \boldsymbol{Y}_S\boldsymbol{X}=0\end{cases}$$

于是当线性规划达到最优时，有下列关系。

(1) 如果原问题的某一约束为紧约束(松弛变量为零)，该约束对应的对偶变量应大于或等于零。

(2) 如果原问题的某一约束为松约束(松弛变量大于零)，则对应的对偶变量必为零。

(3) 如果原问题的某一变量大于零，该变量对应的对偶约束为紧约束。

(4) 如果原问题的某一变量等于零，该变量对应的对偶约束可能是紧约束，也可能是松约束。

定理 2-5 设原问题 P 与其对应的对偶问题 D 分别如下：

$$\max Z=\boldsymbol{CX}\qquad\qquad \min\omega=\boldsymbol{Yb}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}_S=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}_S\geqslant 0\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{YA}-\boldsymbol{Y}_S=\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Y}_S\geqslant 0\end{cases}$$

则原问题单纯形表的检验数的相反数对应其对偶问题的一个基解。其对应关系见表 2-2。

表 2-2　原问题的检验数与对偶问题的解的对应关系

X_B	X_N	X_S
0 Y_{S1}	$C_N-C_BB^{-1}N$ $-Y_{S2}$	$-C_BB^{-1}$ $-Y$

表中 Y_{S1} 是对应原问题中基变量 X_B 的剩余变量，Y_{S2} 是对应原问题中非基变量 X_N 的剩余变量。

证： 设 B 是原问题的一个可行基，于是 $A=(B，N)$，原问题可以写为

$$\max Z=C_BX_B+C_NX_N$$
$$\begin{cases}BX_B+NX_N\leqslant b\\ X_B，X_N\geqslant 0\end{cases}$$

则其对应的对偶问题为

$$\min\omega=Yb$$
$$\begin{cases}YB\geqslant C_B\\ YN\geqslant C_N\\ Y\geqslant 0\end{cases}$$

原问题与对偶问题的标准形式分别为

$$\max Z=C_BX_B+C_NX_N$$
$$\begin{cases}BX_B+NX_N+X_S=b\\ X_B，X_N，X_S\geqslant 0\end{cases}$$
$$\min Z=Yb$$
$$\begin{cases}YB-Y_{S1}=C_B & (2-4)\\ YN-Y_{S2}=C_N & (2-5)\\ Y\geqslant 0\end{cases}$$

这里 $Y_S=(Y_{S1}，Y_{S2})$。

当求得原问题的一个解 $X_B=B^{-1}b$ 时，其相应的检验数为 $C_N-C_BB^{-1}N$ 与 $-C_BB^{-1}$。令 $Y=C_BB^{-1}$，将其代入式(2-4)、式(2-5)得

$$Y_{S1}=0$$
$$-Y_{S2}=C_N-C_BB^{-1}N$$

在有些情况下，应用以上关系可以很方便地求解线性规划问题。

【例 2.2】 已知线性规划问题

$$\max Z=x_1+x_2$$
$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\leqslant 2\\ -2x_1+x_2-x_3\leqslant 1\\ x_1，x_2，x_3\geqslant 0\end{cases}$$

试用对偶理论证明该线性规划问题无最优解。

解： 首先可以看出原问题存在可行解，如 $X=(0，0，0)$，其对偶问题为

$$\min\omega=2y_1+y_2$$
$$\begin{cases}-y_1-2y_2\geqslant 1\\ y_1+y_2\geqslant 1\\ y_1-y_2\geqslant 0\\ y_1,\ y_2\geqslant 0\end{cases}$$

由第一个约束条件可知该对偶问题无可行解，因而无最优解，所以原问题无最优解，证毕。

【例 2.3】 已知线性规划问题

$$\min Z=2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5\geqslant 4\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5\geqslant 3\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5\end{cases}$$

又已知其对偶问题的最优解为 $y_1^*=4/5$，$y_2^*=3/5$，$Z=5$。试用对偶理论解原问题。

解： 其对偶问题为

$$\max\omega=4y_1+3y_2$$
$$\begin{cases}y_1+2y_2\leqslant 2 & ①\\ y_1-y_2\leqslant 3 & ②\\ 2y_1+3y_2\leqslant 5 & ③\\ y_1+y_2\leqslant 2 & ④\\ 3y_1+y_2\leqslant 3 & ⑤\\ y_1,\ y_2\geqslant 0\end{cases}$$

将 y_1^*、y_2^* 的值代入约束条件，得②、③、④为严格不等式，其对应的对偶松弛变量 y_{s2}，y_{s3}，$y_{s4}\neq 0$，由互补松弛定理得 $x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$；又因为 y_1^*，$y_2^*\neq 0$，由互补松弛定理得 $x_{s1}=x_{s2}=0$，即原问题约束条件为严格等式，也就是

$$\begin{cases}x_1^*+3x_5^*=4\\ 2x_1^*+x_5^*=3\end{cases}$$

求解得 $x_1^*=1$，$x_5^*=1$，故原问题的最优解为

$$\boldsymbol{X}^*=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

2.3 对偶单纯形法

2.3.1 对偶单纯形法的思路

对偶单纯形法是用对偶原理求解原问题解的一种方法，而不是求解对偶问题解的单纯形法。与对偶单纯形法相对应，已有的单纯形法称为原始单纯形法。两种求解原问题的方法的主要区别在于：原始单纯形法在整个迭代过程中，始终保持原问题的可行性即 $\boldsymbol{X_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，达到最优解时检验数 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$ 为止，而 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$ 也就是 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA}\leqslant 0$，即 $\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}$，所以原始单纯形法实质就是在保证原问题可行的条件下向对偶问题可行的方向迭代；而对偶单纯形法在整个迭代过程中，始终保持对偶问题的可行性即 $\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}$，也

始终保持所有检验数 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$，最后达最优解时 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$ 即满足原问题的可行性为止，所以对偶单纯形法实质就是在保证对偶问题可行的条件下向原问题可行的方向迭代。

总之，对偶单纯形法适应求解的线性规划问题是目标函数最大化(或最小化)，价格向量 $\boldsymbol{C}\leqslant 0$(或 $\boldsymbol{C}\geqslant 0$)，且属于初始可行基中有负单位基、约束条件是“$\geqslant$”形式。对此线性规划问题可不用人工变量法，而用对偶单纯形法，先给约束条件是“$\geqslant$”形式的约束两边乘(－1)，使约束条件变为“$\leqslant$”形式，然后加松弛变量即可得初始可行基 $\boldsymbol{B}$。此时原问题存在一个基本解 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\leqslant 0$，但不是基本可行解；检验数 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$(或$\geqslant 0$)也就是满足 $\boldsymbol{YA}\geqslant\boldsymbol{C}$，即对偶问题存在可行解；再迭代保持检验数 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leqslant 0$(或$\geqslant 0$)，使 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$ 即原问题得到基本可行解，由对偶定理 2－3(3)可知，原问题得到最优解。即为对偶单纯形法的思路。

对偶单纯形法与原始单纯形法相比有以下两个显著的优点。

(1) 初始解是非可行解。当检验数都非正时，可以进行基的变换，这时不需要引进人工变量，简化了计算。

(2) 对于变量个数多于约束方程个数的线性规划问题，采用对偶单纯形法计算量少。因此对于变量较少、约束较多的线性规划问题，可用对偶单纯形法求解。

2.3.2 对偶单纯形法的计算步骤

对偶单纯形法一般解题步骤如下。

(1) 根据线性规划问题，列出初始单纯形表。检查 b 列的数字，若都为非负，并且检验数都为非正，则已得到最优解，停止计算；若检查 b 列的数字时，至少还有一个负分量，并且检验数都为非正，那么进行以下计算。

(2) 确定换出变量。按 $\min\limits_i\{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i \mid (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i<0\}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l$ 对应的基变量 x_l 为换出变量。

(3) 确定换入变量。在单纯形表中检查 x_l所在行的各系数 a_{lj} $(j=1, 2, \cdots, n)$。若所有 $a_{lj}\geqslant 0$，则无可行解，停止计算；若存在 $a_{lj}<0(j=1, 2, \cdots, n)$，计算下式

$$\theta=\min_j\left\{\frac{c_j-Z_j}{a_{lj}}\middle| a_{lj}<0\right\}=\frac{c_k-Z_k}{a_{lk}}$$

按 θ 规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(4) 以 a_{lk} 为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的单纯形表。

(5) 重复上述(1)～(4)步骤，直至获得最优解。

【例 2.4】 用对偶单纯形法求解下列线性规划问题：

$$\min Z=2x_1+3x_2+4x_3$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3\geqslant 3 \\ 2x_1-\ x_2+3x_3\geqslant 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

解： 先将这个问题化成标准型：

$$\max(-Z)=-2x_1-3x_2-4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1-2x_2-x_3+x_4=-3 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_5=-4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

再建立这个问题的初始单纯形表，并进行迭代运算，见表 2-3、表 2-4、表 2-5。

表 2-3 初始单纯形表

c_j			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−3	−1	−2	−1	1	0
0	x_5	−4	[−2]	1	−3	0	1
c_j-Z_j			−2	−3	−4	0	0
θ_j			1	—	4/3		

表 2-4 单纯形表(第一次迭代)

c_j			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	0	[−5/2]	1/2	1	−1/2
−2	x_1	2	1	−1/2	3/2	0	−1/2
c_j-Z_j			0	−4	−1	0	−1
θ_j				8/5	—		2

表 2-5 单纯形表(第二次迭代)

c_j			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
−3	x_2	2/5	0	1	−1/5	−2/5	1/5
−2	x_1	11/5	1	0	7/5	−1/5	−2/5
c_j-Z_j			0	0	−9/5	−8/5	−1/5

表 2-5 中 b 列数字全为非负，检验数全为非正，故该线性规划问题的最优解为

$$\boldsymbol{X}^*=(11/5,\ 2/5,\ 0\quad 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

若原问题的两个约束条件对应的对偶变量分别为 y_1 和 y_2，则原问题的对偶问题的最优解为

$$\boldsymbol{Y}^*=(y_1^*,\ y_2^*)=(8/5,\ 1/5)$$

2.4 对偶问题的经济解释

2.4.1 影子价格

设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\max Z=\{\boldsymbol{CX}|\boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 的最优解 Z^* 对应的基，则有

$$Z^* = \boldsymbol{C_B B^{-1} b} = \boldsymbol{Y^* b}$$

由此

$$\frac{\partial Z^*}{\partial \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{C_B B^{-1}} = \boldsymbol{Y^*}$$

这就是说，对偶问题最优解的经济意义是在其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

由例1.8的最终单纯形表(见表1-6)可知，其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 1.5$，$y_2^* = 0.125$，$y_3^* = 0$。这说明在其他条件不变的情况下，若设备增加一台时，该厂按最优计划安排生产可多获利润1.5元；原材料A增加1kg，可多获利润0.125元；原材料B增加1kg，对获利润无影响。

y_i的值代表对第 i 种资源的估价值。这种估价是针对具体工厂的具体产品而存在的一种特殊价格，称它为“影子价格”。影子价格的经济意义如下。

(1) 在该厂现有资源和现有生产方案的条件下，设备的每小时租赁费为1.5元，1kg原材料A的出让费为除成本外再附加0.125元，1kg原材料B可按原成本出让，这时该厂的收入与自己组织生产时所获利润相等。

(2) 影子价格随具体情况而异，在完全市场经济的条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大生产；而当某种资源的市场价格高于影子价格时，企业的决策者应把已有的资源卖掉。可见影子价格是企业根据市场价格变动调整企业生产计划的一个依据。

影子价格有如下特点。

(1) 影子价格的大小客观地反映了资源在系统内的稀缺程度。根据互补松弛定理的条件，如果某一资源在系统内供大于求(即有剩余)，其影子价格(即对偶解)就为零。这一事实表明，增加该资源的供应不会引起系统目标的任何变化。如果某一资源是稀缺资源(即相应约束条件的剩余变量为零)，则其影子价格必然大于零(非基变量的检验数为非零)。影子价格越高，资源在系统中越稀缺。

(2) 影子价格是一种边际价格，它与经济学中所说的边际成本的概念类似，因而在经济管理中有重要的应用价值。

(3) 影子价格是对系统资源的一种最优估价，只有当系统达到最优时才能赋予该资源这种价值。因此，有人也把它称为最优价格。

(4) 影子价格的值与系统状态有关。系统内部资源数量、技术系数和价格的任何变化，都会引起影子价格的变化，所以它又是一种动态价格。

2.4.2 边际贡献

在单纯形迭代过程中，如果检验数 $\boldsymbol{C_N} - \boldsymbol{C_B B^{-1} N} > 0$，根据目标函数的表达式，目标函数值的改善实际就取决于 $\boldsymbol{X_N}$(迭代后将变为基变量)可能取值的大小，所以目标函数 Z 也可看作非基变量 $\boldsymbol{X_N}$ 的函数，即 $Z = f(\boldsymbol{X_N})$，求偏导后得

$$\partial Z / \partial \boldsymbol{X_N} = \boldsymbol{C_N} - \boldsymbol{C_B B^{-1} N} = \boldsymbol{b}_{oj}$$

该式表明，检验数在数学上可以解释为非基变量的单位改变量引起目标函数的改变量。检验数可以表示为

$$\boldsymbol{b}_{oj} = c_j - \boldsymbol{C_B B^{-1} P}_j = c_j - \boldsymbol{Y P}_j$$

大家已经知道，$\boldsymbol{Y}$ 是影子价格，$\boldsymbol{P}_j$ 是第 j 种产品对各种资源的消耗系数(即基中的第 j 个列向量)，所以 $\boldsymbol{YP}_j$ 可解释为按影子价格计算的产品成本。c_j 一般都是产品的边际价值即价格，因此，检验数即产品价格 c_j 与影子成本 $\boldsymbol{YP}_j$ 的差额，在经济上就可以解释为产品对于目标函数的边际贡献，即增加该产品单位产量对目标函数能够带来的贡献。

检验数与每一个变量相对应，当线性规划达到最优时，检验数总是小于或等于零(对于极大化问题)，这意味着在最优状态下，每个变量对于目标函数的边际贡献都小于或等于零。具体地讲，这分为两种情况：对基变量而言，根据互补松弛定理的条件，由于变量 $\boldsymbol{X}>0$，故其对应的检验数($\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA}$)必为零，所以基变量对于目标函数的贡献为零，这实际也就是等边际原理 MVP＝MIC。其中：MIC＝成本增量/产出增量，MVP＝价值产品增量/产出增量＝产品价格。按照等边际原理，只有在 MVP＝MIC 成立时，产品生产的规模才是最佳的(在这里给定的条件下，MIC＝0，因为资源给定，增加产出不涉及成本)。反过来，对于非基变量而言，由于检验数($\boldsymbol{C}-\boldsymbol{YA}$)$<0$，因此相应的变量只能取零值才能保证最优解条件的成立，也就是说，如果某产品对目标函数的边际贡献小于零，最好以不安排生产为宜。

由检验数所代表的边际贡献与影子价格具有相类似的特点：它是系统在达到最优时对变量价格的估量；其取值也受系统状态的影响，随系统状态的变化而变化。

2.5 灵敏度分析

灵敏度分析是指对系统或事物因周围条件的变化显示出来的敏感性程度的分析。

在前面讲的线性规划问题中，通常都是假定问题中的 a_{ij}、b_i、c_j 系数是已知的常数，但实际上这些参数都只是一些估计或预测的数字。在现实中，如果市场条件变化，c_j 值就会发生变化；如果工艺技术条件改变，则 a_{ij} 就会变化；如果资源的可用量发生变化，则 b_i 也会发生变化。因此，就必然会提出这样的问题：当这些参数中的一个或几个发生变化时，原问题的最优解会有什么变化；或者说当这些参数在一个多大的范围内变化时，原问题的最优解性质会保持不变；这就是灵敏度分析所要研究解决的问题。

当然，如果线性规划问题中的一个或几个参数变化时，完全可以用单纯形法从头计算，看最优解有无变化，但这样做既麻烦又没有必要。因为由单纯形法的迭代过程可以知道，线性规划的求解是从一组基向量变换为另一组基向量，其中每步迭代得到的数字只随基向量的不同选择而有所改变，因此完全有可能把个别参数的变化直接在原问题获得最优解的最终单纯形表上反映出来。这样就不需要从头计算，而只需对获得最优解的单纯形表进行审查，看这些参数变化后是否仍满足最优解的条件。如果不满足的话，再从这个表开始进行迭代计算，只是要将这些参数变换成最终单纯形表状态下的数字。例如，若 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 表示最终单纯形表中可行基的逆矩阵，$\boldsymbol{P}_j^{(0)}$ 表示初始单纯形表中 x_j 的系数列向量，$\boldsymbol{b}^{(0)}$ 表示初始单纯形表中资源向量，那么技术消耗参数和基变量的值在最终单纯形表中就分别为 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j^{(0)}$，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^{(0)}$。

下面就资源向量变动、价格向量变动和技术系数变动的灵敏度分析分别予以介绍。

2.5.1 资源向量的灵敏度分析

资源向量的灵敏度分析是指当资源向量 $\boldsymbol{b}$ 变动且假定规划问题的其他系数都不变时，原问题解的变化情况。

设资源向量中的某一元素 b_r 发生变化，且有 $b_r'=b_r+\Delta b_r$，那么，原问题最终单纯形表的解变化为

$$\boldsymbol{X}_B'=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$$

这里 $\Delta\boldsymbol{b}=(0，0，\cdots，0，\Delta b_r，0，\cdots，0)^{\mathrm{T}}$，而最终单纯形表中的检验数不变。因此，$\boldsymbol{X}_B'\geqslant 0$ 时，原问题的最优解性质不变，即原问题最终单纯形表仍为最优单纯形表；但最优解值发生了变化，$\boldsymbol{X}_B'$ 为新的最优解，所以保证原问题最优解性质不变的资源数量可允许变化范围用以下方法确定。

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{B}^{-1}(0，0，\cdots，0，\Delta b_r，0，\cdots，0)^{\mathrm{T}}\\&=(a_{1r}\Delta b_r，\cdots，a_{ir}\Delta b_r，\cdots，a_{mr}\Delta b_r)^{\mathrm{T}}\\&=\Delta b_r(a_{1r}，\cdots，a_{ir}，\cdots，a_{mr})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中，a_{ir} 是 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 第 r 列的所有元素，$i=1，2，\cdots，m$

这时在最终单纯形表中，资源向量的所有元素由原来的 b_i 变为 $b_i+a_{ir}\Delta b_r\geqslant 0$，$i=1，2，\cdots，m$。由此可得

$$a_{ir}\Delta b_r\geqslant -b_i，\quad i=1，2，\cdots，m$$

当 $a_{ir}>0$ 时，$\Delta b_r\geqslant -b_i/a_{ir}$

当 $a_{ir}<0$ 时，$\Delta b_r\leqslant -b_i/a_{ir}$

于是，得到保证原问题最优解性质不变的资源数量允许变化范围为

$$\max_i\{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\,|\,\bar{a}_{ir}>0\}\leqslant\Delta b_r\leqslant\min_i\{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ir}\,|\,\bar{a}_{ir}<0\}$$

例如，求例 1.1 中资源向量元素 b_2 的允许变化范围 Δb_2 时，可计算

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}0\\\Delta b_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.25\\0.5\\-0.125\end{bmatrix}\Delta b_2\geqslant\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可得 Δb_2 的变化范围为 $\max\{-4/0.25，-4/0.5\}\leqslant\Delta b_2\leqslant\min\{-2/(-0.125)\}$。
即 Δb_2 的变化范围为 $[-8，16]$，显然 b_2 的允许变化范围为 $[8，32]$。

【例 2.5】 从表 1-5 得知第 1 章例 1.1 中，设备台时的影子价格为 1.5 元，即该资源的增加会引起目标函数值的增加。若该厂又从别处抽出 4 台时用于生产Ⅰ和Ⅱ，求这时该厂生产产品Ⅰ和Ⅱ的最优方案。

解： 由表 1-5 可知

$$\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0&0.25&0\\-2&0.5&1\\0.5&-0.125&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix}$$

将此结果反映到原问题最终单纯形表 1-5 中，见表 2-6。

表 2-6　资源向量变化后的单纯形表

c_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4−8	0	0	[−2]	0.5	1
3	x_2	2+2	0	1	0.5	−0.125	0
c_j-Z_j			0	0	−1.5	−0.125	0

由于表 2-6 中 b 列有负数，故用对偶单纯形法求新的最优解，计算结果见表 2-7。

表 2-7　资源向量变化后的最终单纯形表

c_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_3	2	0	0	1	−0.25	−0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25
c_j-Z_j			0	0	0	−0.5	−0.75

即该厂最优生产方案应改为生产Ⅰ产品 4 件，生产Ⅱ产品 3 件，获得的利润为

$$Z^*=4\times2+3\times3=17(\text{元})$$

从表 2-7 可以看出 $x_3=2$，即设备有 $4-2=2$ 台时未被利用。再看影子价格表示单位资源变量引起目标函数的变化值。变化前 $Z^*=14$(元)，变化后 $\underline{Z}^*=Z^*+1.5\times2=14+3=17$(元)。

2.5.2　价格向量的灵敏度分析

价格向量(即目标函数系数)的灵敏度分析分为原最终单纯形表中 c_j 与非基变量和基变量对应两种情况来讨论。

(1) 若 c_j 是非基变量 x_j 的价值系数，则其对应的最终单纯形表中的检验数为

$$\sigma_j=c_j-\boldsymbol{C_B B^{-1} P_j}$$

或

$$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i$$

当 c_j 变化 Δc_j，要保证最终单纯形表的最优解不变，必有

$$\sigma_j'=c_j+\Delta c_j-\boldsymbol{C_B B^{-1} P_j}\leqslant0$$

保证最终单纯形表最优解不变，可得 c_j 的允许变化值 Δc_j

$$\Delta c_j\leqslant\boldsymbol{C_B B^{-1} P_j}-c_j$$

(2) 若 c_r 是基变量 x_r 的价值系数，应有 $c_r\in\boldsymbol{C_B}$，当 c_r 变化 Δc_r 时，就引起 $\boldsymbol{C_B}$ 的变化，这时

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C_B}+\Delta\boldsymbol{C_B})\boldsymbol{B^{-1}A}&=\boldsymbol{C_B B^{-1} A}+(0,\ \cdots,\ 0,\ \Delta c_r,\ 0,\ \cdots,\ 0)\boldsymbol{B^{-1}A}\\&=\boldsymbol{C_B B^{-1} A}+\Delta c_r(a_{r1},\ a_{r2},\ \cdots,\ a_{rn})\end{aligned}$$

即当 c_r 变化 Δc_r 后，最终单纯形表中的检验数是

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} A - \Delta c_r a_{rj}, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

若要求原最优解不变，必须满足 $\sigma_j' \leqslant 0$。于是得到

当
$$a_{rj} < 0, \quad \Delta c_r \leqslant \sigma_j / a_{rj}$$
$$a_{rj} > 0, \quad \Delta c_r \geqslant \sigma_j / a_{rj}$$

所以，Δc_r 可变化的范围是

$$\max_j \{\sigma_j / a_{rj} \mid a_{rj} > 0\} \leqslant \Delta c_r \leqslant \min_j \{\sigma_j / a_{rj} \mid a_{rj} < 0\}$$

【例 2.6】 试以例 1.1 的最终单纯形表 1-5 为例，设基变量 x_2 的价值系数 c_2 变化 Δc_2，在原最优解不变的条件下，确定 Δc_2 的变化范围。

解： 考虑 Δc_2，表 1-5 的最终单纯形表见表 2-8。

表 2-8 价格向量变化后的单纯形表

c_j			2	$3+\Delta c_2$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0	0	4	0.5	1
$3+\Delta c_2$	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0
$c_j - Z_j$			0	0	$-3/2-\Delta c_2/2$	$\Delta c_2/8-1/8$	0

从表 2-8 可见，要保证原线性规划问题最优解不变，必须满足

$$-3/2-\Delta c_2/2 \leqslant 0 \quad 和 \quad \Delta c_2/8-1/8 \leqslant 0$$

由此可得 Δc_2 的变化范围为

$$-3 \leqslant \Delta c_2 \leqslant 1$$

即 x_2 的价值系数 c_2 可以在 [0, 4] 之间变化，而不影响原最优解。

2.5.3 技术系数发生变化的灵敏度分析

下面分两种情况来讨论技术系数发生变化。

1. 在最优生产方案的基础上分析是否增加一个新产品

【例 2.7】 以例 1.1 为例。设该厂除了生产Ⅰ、Ⅱ外，现有一种新产品Ⅲ。已知生产产品Ⅲ时，每件需消耗原材料 A、B 各为 6kg、3kg，使用设备 2 台时，每件可获利润 5 元。问该厂是否应生产该产品？若生产该产品，如何安排生产计划使所获利润最大？

解： 这类问题一般可分为 3 个步骤进行分析。

第一步，计算新产品在原线性规划问题最终单纯形表中的检验数。

设生产Ⅲ产品 x_3' 件，其技术系数向量 $P_3' = (2, 6, 3)^T$，则在原最终单纯形表中的检验数 σ_3' 为

$$\begin{aligned} \sigma_3' &= c_3' - C_B B^{-1} P_3' \\ &= 5 - (1.5, 0.125, 0)(2, 6, 3)^T \\ &= 1.25 > 0 \end{aligned}$$

说明安排生产产品Ⅲ是有利的。

第二步，计算产品Ⅲ在原最终单纯形表中的对应 x_3' 的列向量是

$$B^{-1}P_3'=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\2\\0.25\end{bmatrix}$$

则增加新产品 x_3'后的最终单纯形表见表 2-9。

表 2-9 增加新产品后的单纯形表

c_j			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	1.5
0	x_5	4	0	0	−2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0.5	−0.125	0	0.25
c_j-Z_j			0	0	−1.5	−0.125	0	1.25

由于最终单纯形表中资源向量 b 没有变化，即原问题的解是可行解。但检验数 $\sigma_3'=1.25>0$，说明此时目标函数还没达最优解。

第三步，进行迭代，求出最优解。计算结果见表 2-10。

表 2-10 增加新产品后的最终单纯形表

c_j			2	3	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3'
2	x_1	1	1	0	1.5	−0.125	−0.75	0
5	x_3'	2	0	0	−1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0.75	−0.1875	−0.125	0
c_j-Z_j			0	0	−0.25	−0.4375	−0.625	0

所有检验数都小于等于零，该线性规划问题达最优解，最优解为：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3'=1.5$。总的利润为 16.5 元，比原计划增加了 2.5 元。

2. 分析产品技术系数发生变化对原线性规划问题最优生产计划的影响

产品技术系数发生变化有两种情况：一是产品设计的改进引起技术系数变动，这种情况一般会引起某一列系数变动；二是工艺的改进引起技术系数变动，这种情况一般会引起某一行系数变动。

【例 2.8】 分析原计划生产产品的工艺结构发生变化，仍以例 1.1 为例。若原计划生产产品Ⅰ的工艺结构有了改进，它的技术系数变为 $P_1'=(2,5,2)^{\mathrm{T}}$，每件利润为 4 元。试分析对原线性规划问题最优计划的影响。

解： 把改进工艺结构的产品Ⅰ看作产品Ⅰ′，设 x_1'为其产量。于是计算在最终表中对应 x_1'的列向量，并以 x_1'代替 x_1。

$$B^{-1}P_1'=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0\\ -2 & 0.5 & 1\\ 0.5 & -0.125 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.25\\0.5\\0.375\end{bmatrix}$$

同时计算最终表中对应 x_1'的检验数为

$$\sigma_1' = c_1' - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_1' = 4-(1.5,\ 0.125,\ 0)(2,\ 5,\ 2)^{\mathrm{T}} = 0.375$$

将以上计算结果填入最终表 x_1' 的列向量位置，见表 2－11。

表 2－11　技术系数变化后的单纯形表

c_j			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	4	1.25	0	0	0.25	0
0	x_5	4	0.5	0	−2	0.5	1
3	x_2	2	0.375	1	0.5	−0.125	0
c_j-Z_j			0.375	0	−1.5	−0.125	0

由于 b 列的数字没有变化，原问题的解是可行解。但检验数行中还有正检验数，说明目标函数值还可以改善。

将 x_1' 作为换入变量，x_1 作为换出变量，进行迭代，求出最优解。计算结果见表 2－12。

表 2－12　技术系数变化后的最终单纯形表

c_j			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_1'	3.2	1	0	0	0.2	0
0	x_5	2.4	0	0	−2	0.4	1
3	x_2	0.8	0	1	0.5	−0.2	0
c_j-Z_j			0	0	−1.5	−0.2	0

表 2－12 表明原问题和对偶问题的解都是可行解，所以表中的结果已是最优解。即应当生产Ⅰ′产品 3.2 单位，生产Ⅱ产品 0.8 单位；可获利润 15.2 元。

注意：若碰到原问题和对偶问题均为非可行解，就需要引进人工变量后重新求解。

除以上介绍的几项分析外，还可以作增减约束条件等分析。留给读者自己考虑。

2.6　应 用 案 例

发电机组燃料优化管理模型①

在当前电煤供应不足的情况下，难以购买到完全符合锅炉燃烧特性的煤种，煤质的变化会改变电厂发电成本的变化，而其中大部分为燃料成本的变化。发电厂面临煤种的选择问题，选择哪种煤炭，其比例多少，才能最大限度地降低发电成本，提高经济效益？

每台发电机组都有它当初的设计煤种，它对燃料的硫份、水份、灰份、热值、挥发份和可磨系数都有一定的要求。在传统的锅炉燃烧中，经常用的是单煤燃烧，这在计划经济时代不存在大的问题；但随着改革的深入，煤炭价格的市场化，电煤价格持续上升，电煤成为稀缺资源，劣质煤炭充斥市场，要购买到完全符合锅炉燃烧条件的煤种已变得十分困难。利用多种煤混合出满足锅炉燃烧需要的煤种，是一种非常有效的方法。

以配煤最低成本为目标函数，以单煤的成本，煤质参数和锅炉的燃烧品质参数的临界值为约束条件，构造该问题的线性规划模型。

某电厂 200MW 机组燃煤煤质要求见表 2－13。

表 2－13　某电厂 200MW 机组燃煤煤质要求

机组	热值	水份	挥发份	灰份
200MW	=20423J/kg	<7.17%	>20%	<42%

该电厂可用的各种煤调研资料见表 2－14。

表 2－14　某电厂 200MW 机组优化配煤、选煤计算表

	煤(071)	煤(158)	煤(180)	煤(295)	煤(309)	指标要求
热值	16749	25648	22422	25340	22843	=20423
水份	5.5	7.9	6.8	6.8	7	<7.17
挥发份	35.47	32.42	33.81	17.91	30.16	>20
灰份	44.85	13.32	27.87	20.96	25.92	<42.6
价格	100.11	153.69	125.57	142.65	134.92	
运费	100.75	39.21	66.06	45.5	83.45	
总费用	213.87	212.88	207.95	206.69	235.91	费用最少

确定该电厂最佳的选用煤方案；当煤的种类或价格发生变化时，进行灵敏度分析。

① 深圳大学《运筹学》精品课工程案例。

习　　题

1. 简述线性规划的对偶问题与原问题数学模型的对应关系。
2. 写出对偶单纯形法的计算步骤，对比说明对偶单纯形法与单纯形法的区别。
3. 线性规划对偶问题最优解的经济意义是什么？
4. 写出下列线性规划问题的对偶问题。

(1) $\min Z=2x_1+2x_2+4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3\geqslant 2 \\ 3x_1+x_2+7x_3\geqslant 3 \\ x_1+4x_2+6x_3\geqslant 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max Z=2x_1-4x_2+3x_3$

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3\leqslant 12 \\ 2x_2+x_3\geqslant 10 \\ x_1-2x_3=15 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\leqslant 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

5. 已知线性规划问题。

$\max Z=2x_1+x_2+5x_3+6x_4$　　对偶变量

$$\begin{cases} 2x_1+x_3+x_4\leqslant 8 & y_1 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4\leqslant 12 & y_2 \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ 4 \end{cases}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^*=4$，$y_2^*=1$，试应用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

6. 试用对偶单纯形法求解下列线性规划问题。

(1) $\min Z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 4\\ x_1+7x_2\geqslant 7\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min Z=3x_1+2x_2+x_3+4x_4$

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+5x_3+x_4\geqslant 0\\ 3x_1-x_2+7x_3-2x_4\geqslant 2\\ 5x_1+2x_2+x_3+6x_4\geqslant 15\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ \cdots,\ 4\end{cases}$$

7. 某一极大化线性规划问题的最优单纯形表见表 2-15。

表 2-15　最优单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-Z$	$-10/3$	0	0	$-1/3$	$-1/3$
X_1	8/9	1	0	5/9	$-1/9$
X_2	11/9	0	1	$-1/9$	2/9

试分析：

(1) 目标函数的价值系数分别由过去的(1，2)变为(3，5)后发生的变化。

(2) 资源约束分别由过去的$(3,\ 7)^{\mathrm{T}}$ 变为$(8,\ 11)^{\mathrm{T}}$ 发生的变化。

(3) 某新产品的单价为 1，消耗系数为 $\boldsymbol{P}_j=(1,\ 3)^{\mathrm{T}}$，是否该生产该产品。

(4) 产品Ⅰ的消耗系数由原来的 $\boldsymbol{P}_1=(2,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 变为$(1,\ 2)^{\mathrm{T}}$，产品结构发生何变化。

8. 某企业生产甲乙两种产品，需要 A、B 两种原料，生产消耗等有关参数见表 2-16，

表 2-16　产品消耗、成本信息

	甲	乙	可用量/kg	原材料成本/kg
原材料 A	2	4	160	1
原材料 B	3	2	180	2
单价/元	13	16		

试解答下列问题：

(1) 构造一个利润最大化模型，并求出最优方案。

(2) 原料 A，B 的影子价格各是多少？哪一种更珍贵？

(3) 假定市场上有 A 原料出售，企业是否应该购入以扩大生产？在保持原方案不变的前提下，最多应购入多少？可增加多少利润？

(4) 如果乙产品价格可达到 20 元/件，方案会发生什么变化？

(5) 现有新产品丙可投入开发，已知对两种原料的消耗系数分别为 3 和 4，问该产品的价格至少应为多少才值得生产？

关键词及其英文对照

对偶问题	dual problem	对偶单纯形法	dual simplex method
灵敏度分析	sensitivity analysis	影子价格	shadow price

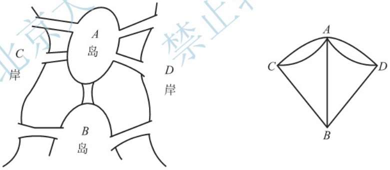
第 6 章 图与网络分析

网络分析(图论)是应用十分广泛的运筹学分支。同其他分支相比，它具有对实际问题描述更直观、将复杂问题分解或转化成为更有效的方法进行求解等特点。其理论和方法广泛应用在物理、化学、控制论、信息论、管理科学、电子计算机等各个领域。本章网络分析将介绍最短路问题、最大流问题、最小费用最大流问题，读者通过学习有关图与网络的基本概念，应了解几种标准的网络模型。

6.1 图与网络的基本概念

6.1.1 图与网络

关于图的第一篇论文是瑞士数学家欧拉在 1736 年发表的，他由于解决了“哥尼斯堡七桥难题”而被公认为图论的创始人。普瑞格尔(Pergel)河从古城哥尼斯堡市中心流过，在河两岸与河心两个小岛之间架设有 7 座桥，如图 6.1(a)所示，问题是一个旅人能否通过每座桥一次且仅一次？欧拉将这个问题归结为如图 6.1(b)所示的问题，他从 A，B，C，D 任一点出发，能否通过每条边一次且仅一次再回到原点。欧拉证明了这样的走法是不存在的，并给出了这类问题的一般结论。



(a) (b)

图 6.1 七桥问题

在人类社会的活动中，大量的事物及事物间的关系都可以用图论来描述和解决。例如，我国各省会城市间的航空交通图，反映了各城市间的航班分布，在图论中通常用点表示城市，点与点之间的连线表示城市之间的航线。又如，某饮食店在城市中开设了 6 家连锁店，分布在城市的不同地点，配送中心负责送货，如图 6.2 所示，其中用点表示连锁店，用一条连接点与点的无向线段表示店与店之间的连接路线，并给出它们的相对位置(千米)，现需要给出一条最短的送货路线。再如，在球类比赛中，可以用点代表参赛的运动队。如果某两个队比赛过一次，就在这两个队之间连一条线，并且可以用箭头表示胜负，如图 6.3 所示。从该图可以看出，任一球队已赛过的次数及各队比赛的胜负情况。如甲队参赛三场，战绩是三战三胜；乙队参赛三场，战绩是一胜二负。

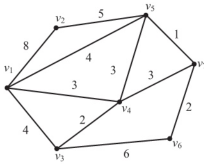


图 6.2　连锁店分布

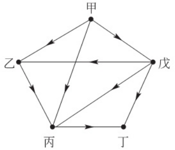


图 6.3　5 个球队的赛事结果

一般来说，图论中的图是由点及点与点之间的连线组成的示意图，通常用点代表所研究的对象，用线代表两个对象之间的特定关系。至于图中点的相对位置如何，点与点之间连线的长短曲直，对于反映对象之间的关系，并不重要。

图论中涉及了许多基本概念和表示方法，下面做一些介绍。

1. 无向图和有向图

如果图中点与点间的连线是没有方向性的，则这种连线称为边或无向边。由点和边构成的图称为无向图，记为 $G=(V, E)$。其中 V 是无向图 G 的点集合，E 是无向图 G 的边集合。V 中的元素 ν_i 称为顶点，E 中的元素 e_i 称为边。连接 V 中的两点 ν_i 和 ν_j 的边记为 $[\nu_i, \nu_j]$ 或 $[\nu_j, \nu_i]$。图 6.1 就是一个无向图。

如果图中点与点之间的连线是有方向性的(用箭头表示)，则这种连线称为弧或有向边，可记为 a 或 (ν_i, ν_j)。(ν_i, ν_j) 中 ν_i 是弧的始点，ν_j 是弧的终点，即弧是由 ν_i 指向 ν_j 的。由点和弧构成的图称为有向图，记为 $D=(\nu, A)$。其中，V 是有向图 D 的点集合，A 是有向图 D 的弧集合。图 6.2 就是一个有向图。有些书上也称有向边为单向边，无向边为双向边。

2. 端点、关联边和相邻

如果边 $e=(\nu_i, \nu_j)$，则称 ν_i 和 ν_j 是 e 的两个端点，称 e 是 ν_i 和 ν_j 的关联边；若 ν_i 和 ν_j 被同一关联边相连，则称点 ν_i 和 ν_j 相邻；若边 e_i 和 e_j 有共同的端点，则称边 e_i 和 e_j 相邻。

3. 环、多重边、简单图和多重图

如果一条边 e 的两个端点相重叠，则称该边为环，如图 6.4 所示的 e_6；如果两点之间有多于一条的关联边，则称该两点具有多重边，如图 6.4 中的 e_2 和 e_3。

含有多重边的图称为多重图，不含环和多重边的图称为简单图，如图 6.5(a)是多重图，图 6.5(b)是简单图。对于有向图，多重弧是指始点和终点相同的弧，即两点之间多条弧的方向是一致的。

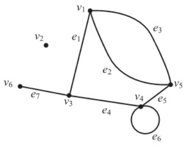
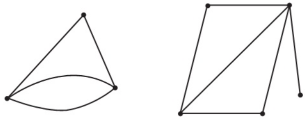


图 6.4　环和多重边示意图



(a) 多重　(b) 简单

图 6.5　简单图和多重图

4. 次、奇点、偶点和孤立点

与某个端点 ν 关联的边的个数，叫做点 ν 的次（也叫做度），用 $deg(\nu)$ 表示，简记为 $d(\nu)$。如在图 6.4 中，$d(\nu_4)=4$，这是因为环 e_6 要计算两次。

次为奇数的点称为奇点，次为偶数的点称为偶点。次为 1 的点称为悬挂点，如图 6.4 中的 ν_6。悬挂点的关联边称为悬挂边，如图 6.4 中的 e_7。次为 0 的点称为孤立点，如图 6.4 中的 ν_2。

定理 6-1 任何图中，顶点的次数总和必等于边数的 2 倍。

定理 6-2 任何图中，如果有奇点，那么奇点总和必为偶数。

由于每条边必与两个点相关联，因此在计算点的次数时，每条边均被计算了两次，因此顶点次数的总和必等于边数的 2 倍。同样在任一图中，假设 V_1、V_2 分别为图 G 中奇点与偶点的集合，即 $V_1 \cup V_2 = V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，于是由定理 6-1 可知，必有

$\sum\limits_{\nu_i \in \nu_1} d(\nu_i) + \sum\limits_{\nu_j \in \nu_2} d(\nu_j) = 2m$，因为式中 $2m$ 是偶数，$\sum\limits_{\nu_j \in \nu_2} d(\nu_j)$ 也是偶数，所以 $\sum\limits_{\nu_i \in \nu_1} d(\nu_i)$ 也必为偶数。

5. 路、连通图和圈

在图 G 中，存在一个以点 ν_1 开始、以点 ν_n 结束的点边交替出现的序列，则称点 ν_1 到 ν_n 的一条链，如图 6.4（ν_1，e_2，ν_5，e_5，ν_4，e_6，ν_4，e_5，ν_5）所示，链中允许有重复的点和边。如果链中存在边不重复的点和边，则称该序列为从 ν_1 到 ν_n 的一条路，如图 6.4（ν_1，e_2，ν_5，e_5，ν_4，e_4，ν_3）所示。如果一条路的起点与终点重合，则称这条路为圈或回路，如图 6.4 所示，（ν_1，e_2，ν_5，e_3，ν_1）就是一个回路。

若在路中，所含的点互不相同，则称这条路为初等路，如图 6.4 中（ν_1，e_3，ν_5，e_5，ν_4）即初等路。

若在路中，所含的边互不相同，则为简单路。如图 6.4 所示，（ν_3，e_4，ν_4，e_6，ν_4，e_5，ν_5）是简单路。既是简单路又是回路的路称为简单回路。

图 G 中，若任何两个不同的点之间，至少存在一条路，则称图 G 为连通图。图 6.4 中，去掉 ν_2 就是连通图；否则，为非连通图。

6. 子图、支撑图和导出子图

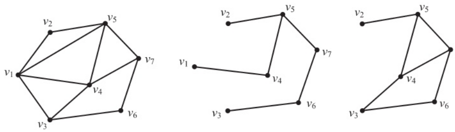
若图 $G_1=(V_1, E_1)$ 和图 $G_2=(V_2, E_2)$，有 $V_1 \subseteq V_2$，且 $E_1 \subseteq E_2$，则称 G_1 是 G_2 的一个子图。若有 $V_1=V_2$ 和 $E_1 \subseteq E_2$，则称 G_1 是 G_2 的支撑图。显然支撑图也是子图，但子图不一定是支撑图。

若图 $G=(V, E)$ 中去掉点 v_i 及 v_i 的关联边后得到的一个图 G'，称图 G' 为图 G 的导出子图。

图 6.6(b) 和图 6.6(c) 都是图 6.6(a) 的子图，其中图 6.6(b) 是图 6.6(a) 的支撑图，图 6.6(c) 是图 6.6(a) 的导出子图。

7. 权、赋权图和网络

边或弧的有关数量指标称为权，如距离、费用、流量等。图 G 中点、边以及边或弧上的权的总体称为赋权图。网络是指定了起点、终点和中间点的连通的赋权图，它包括有向网络、无向网络和混合网络，例如：图 6.2 为无向网络，图 6.3 为有向网络。



(a) 子图　　(b) 支撑图　　(c) 导出子图

图 6.6　子图、支撑图和导出子图

8. 权矩阵

如果简单图 $G=(V, E)$ 的每条边都有权 w_{ij}，构造 $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{V}|$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases} w_{ij} & (\nu_i, \nu_j)\in E \\ 0 & \begin{cases} i=j \\ \nu_i \text{和} \nu_j \text{不相邻} \end{cases} \end{cases} \tag{6-1}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为网络的权矩阵。如图 6.2 的权矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \\ \nu_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 & \nu_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. 关联矩阵

若对简单无向图 $G=(V, E)$ 构造 $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases} 1 & \nu_i \text{ 和 } e_j \text{ 并联} \\ 0 & \nu_i \text{ 和 } e_j \text{ 不关联} \end{cases} \tag{6-2}$$

称 $\boldsymbol{B}$ 为图 $\boldsymbol{G}$ 的关联矩阵。如图 6.2 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \\ \nu_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{25} & e_{34} & e_{36} & e_{45} & e_{47} & e_{57} & e_{67} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

若对简单有向图 $G=(D, A)$ 构造 $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{A}|$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \nu_i\text{和}a_{ij}\text{关联，以点}\nu_i\text{结尾}\\ -1 & \nu_i\text{和}a_{ij}\text{关联，以点}\nu_i\text{开始}\\ 0 & \nu_i\text{和}a_{ij}\text{不关联}\end{cases} \tag{6-3}$$

10. 邻接矩阵

若对简单图 $G=(V,\ E)$ 构造 $|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{V}|$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & (\nu_i,\ \nu_j)\in E\\ 0 & \begin{cases}i=j\\ \nu_i\text{和}\nu_j\text{不相邻}\end{cases}\end{cases} \tag{6-4}$$

称 $\boldsymbol{C}$ 为图 G 的相邻矩阵。如图 6.2 的相邻矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c}\\ \nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\\ \nu_4\\ \nu_5\\ \nu_6\\ \nu_7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}\nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 & \nu_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

6.1.2 树、支撑树和最小树

树图是一种重要的简单图，一个没有回路的连通图称为树，它是连通且不含圈的无向图。树中次大于 1 的点称为分支点，次为 1 的点称为树梢，如图 6.7 所示的都是树。

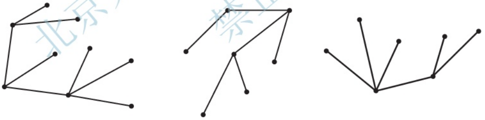


图 6.7 树图示例

图 $T=(V,\ E)$，其中点有 p 个、边有 q 条，即 $|\boldsymbol{V}|=p$，$|\boldsymbol{E}|=q$，则树的性质有以下 6 种等价的描述。

(1) T 是一个树，其必为无圈的连通图。

(2) T 无圈，且 $p=q-1$。

(3) T 连通，且 $p=q-1$。

(4) T 无圈，但任意两点增加一条边，可得到一个且仅一个圈。

(5) T 连通，但舍去任一条边，图就不连通。

(6) T 中任意两点之间有一条且仅有一条路相连。

这些性质结合具体的树图很容易理解，故证明从略。

设图 $T=(V,\ E_1)$ 是图 $G=(V,\ E)$ 的支撑图，如果 T 是一个树，树 T 称为图 G 的支撑树，如图 6.6(b)就是图 6.6(a)的支撑树。

对没有赋权的图来说，要形成支撑树，只要在原图中设法消除圈，使形成的树与原图具有相同的点数即可，因此一个图的支撑树并不唯一。在存在支撑树的赋权图中，必然存在着权最小的支撑树。求权最小的支撑树的问题称为最小树问题。

对于给定网络 $G=(V, E, W)$，设 $T=(V, E_1)$ 为 G 的一个支撑树，令 $W(T)=\sum_{e\in E_1} W(e)$，则称 $W(T)$ 为 T 的权，图 G 中权最小的支撑树就称为 G 的最小树。

最小树在交通网、电力网、电话网和管道网等设计中有着广泛的应用，如设计长度最小的公路网，把若干个城市联系起来；设计线路最短的电话线网，把有关的单位联系起来等。寻找最小树的方法主要有两种：避圈法和破圈法。

1. 避圈法

避圈法(添边法)的基本步骤如下。

(1) 先将图中各边按权的大小顺序由小到大进行排序。

(2) 取原图的全部顶点。

(3) 按照排定的顺序逐步选取边，并使得后续边与已选边不构成圈，同时使所取边为未选边中的最小权边，直到选够 $q=p-1$ 条边为止。

在寻找最小树的过程中，每次所取得的边都是剩余边中最小的，由于图 G 中的总权一定，因此最终找到的树一定是所有支撑树中的最小树。

以图 6.2 为例。设已知各道路长度如图 6.8(a)所示，各边上的数字表示距离，问如何设计线路才能用电缆线最短？这就是一个如何形成最小树的问题。

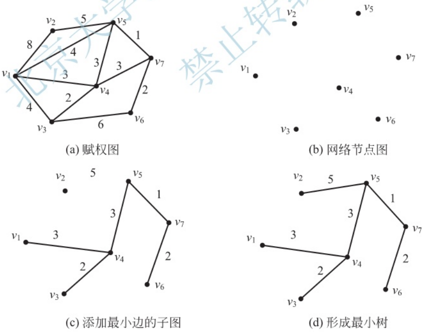


图 6.8 避圈法形成最小树

用避圈法求解，先将图 6.8(a)中的边按权的大小顺序由小到大排列，得到

$$(v_5, v_7)=1,\ (v_3, v_4)=2,\ (v_6, v_7)=2,\ (v_1, v_4)=3,\ (v_4, v_5)=3,\ (v_4, v_7)=3,$$
$$(v_1, v_5)=4,\ (v_1, v_3)=4,\ (v_2, v_5)=5,\ (v_3, v_6)=6,\ (v_1, v_2)=8;$$

然后对照原图，取出所有的点，按照边的排列顺序取树枝边。依次取定 $e_{57}=(v_5, v_7)$，$e_{34}=(v_3, v_4)$，$e_{67}=(v_6, v_7)$，$e_{14}=(v_1, v_4)$，$e_{45}=(v_4, v_5)$，由于边 $e_{47}=(v_4, v_7)$、

$e_{15}=(\nu_1,\ \nu_5)$、$e_{13}=(\nu_1,\ \nu_3)$与图 6.8(c)构成圈，故舍去，选下一条边 $e_{25}=(\nu_2,\ \nu_5)$，这时，已有 6 条边将所有的 7 个点连接起来，故得到了最小树，如图 6.8(d)所示。其权和为 $W(T)=\sum W(e)=16$。

2. 破圈法

破圈法与避圈法的思路相反，其基本步骤是：先从图中任选一圈，去掉权最大的边，再找一个圈，去掉权最大的边……，直到形成连通但无圈的树图为止。

在图 6.9(a)中找出一个圈 $\{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_5\}$，去掉圈中一条最大的边$(\nu_1,\ \nu_2)=8$，再找第二个圈 $\{\nu_1,\ \nu_4,\ \nu_5\}$，去掉圈中一条最大的边$(\nu_1,\ \nu_5)$，…，在圈 $\{\nu_4,\ \nu_5,\ \nu_7\}$ 中一条最大的边有两条，即$(\nu_4,\ \nu_5)=3$，$(\nu_4,\ \nu_7)=3$，可以任意去掉其中的一条，其最小树均为 16。

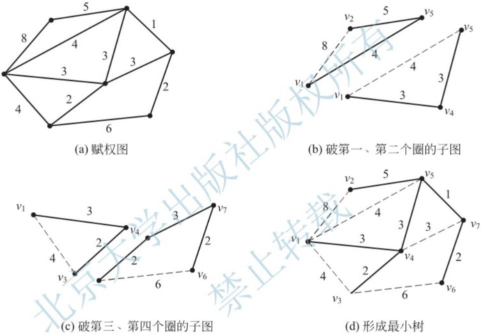


图 6.9 用破圈法寻找最小树

6.2 最短路问题

6.2.1 最短路问题的一般提法

【例 6.1】 已知如图 6.10 所示的交通网络图，每条边上的数字表示通过这条路所需的千米数，某工厂设在 ν_1处，需要将货物送到销售部 ν_6处。从图中可知，箭头表示单行道，从 ν_1到 ν_6有多条线路，实际中为减少成本，需要求使交通里程最短的运货路线。

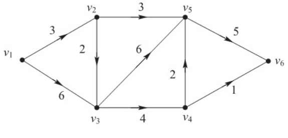


图 6.10 交通网络图

称求最短路线的问题为最短路问题。图论中最短路问题的一般提法是：给定一个赋权图 $G=(V,\ E)$，图中 $V=\{\nu_s,\ \nu_1,\ \cdots,\ \nu_{n-1},\ \nu_t\}$，对每一条边 e 有权 w_{ij} (ν_i 到 ν_j 无关联边时记为 ∞)，ν_s和 ν_t为图中两点，求一条路 P，使得其

总权 $W(P)$ 从 v_s 到 v_t 的所有路中最小，即 $W(P)=\min\limits_{v_s\to v_t}(\sum w_{ij})$。

在最短路问题中，可以假定相应的图是简单图，如果图中有环则可以删掉；如果图中有多重边，可以根据具体含义删除多余的边，或者将多重边合并为一条边。这样做不会影响最短路问题的实质。

最短路问题大量出现于实际问题中，应用领域主要有管道铺设(输油管道、天然气管道等)、运输线路安排、厂区布局、设备更新，以及计算机网络、电路板布线的选择等。求网络中任意两点间的最短路可以用 D(Dijkstra)算法、B(Bellman)算法、F(Floyd)算法来解决，其中 D 算法用于解决无负权网络的最短路问题，B 算法用于解决有负权网络的最短路问题，F 算法是通过矩阵运算求解网络的最短路问题的方法。本节重点介绍 D 算法。

6.2.2 求最短路问题的 D 算法

本算法是由 E. W. Dijkstra 于 1959 年提出的，可用于求解指定两点 v_s 和 v_t 间的最短路和指定点 v_s 到其余各点的最短路。对于所有的 $w_{ij}\geqslant 0$，由动态规划的最优化原理可以得到最优方程，即 $d(v_s,v_j)=\min\{d(v_s,v_i)+w_{ij}\}$，对于 $i\in V$，记为 $w_{ii}=0$；对于 $i\neq j$，若 $v_{ij}\notin E$，记为 $w_{ij}=+\infty$。由于 Dijkstra 提出了在所有算出的最短路的权值中，挑选最短的一个作为从 v_s 到该点的最小权值，这就使得本算法的运算量比动态规划算法有所减少，Dijkstra 算法被公认为是目前求无负权网络最短路问题的最好方法。

Dijkstra 算法的基本思路是：若序列(v_s，v_1，v_2，…，v_{t-1}，v_t)是从 v_s 到 v_t 的最短路，则序列(v_s，v_1，v_2，…，v_{t-1})必为从 v_s 到 v_{t-1} 的最短路。

具体做法是：对所有的点采用两种标号，即 T 标号和 P 标号，T 标号即临时性标号(Temporary Label)，P 标号为永久性标号(Permanent Label)。给 v_i 一个 P 标号，用 $P(v_i)$ 表示，是指从 v_s 到 v_i 的最短路权，v_i 的标号即不再改变。给 v_i 一个 T 标号，用 $T(v_i)$ 表示，是指从 v_s 到 v_i 点估计的最短路权的一个上界，是一种临时性标号。凡是没有得到 P 标号的点都是 T 标号。算法的每一步都把某一点的 T 标号改为 P 标号，当终点 v_t 得到 P 标号时，全部计算结束。对于有 p 个顶点的图，最多经过 $p-1$ 步计算，就可以得到从始点到各点的最短路。

计算步骤如下。

(1) 给始点 v_s 一P 标号，$P(v_s)=0$，其余各点给 T 标号，$T(v_i)=\infty$，$i\neq s$。

(2) 从上次 P 标号的点 v_i 出发，考虑与之相邻的所有 T 标号点 v_j，$(v_i,v_j)\in A$，对 v_j 的 T 标号做以下修改

$$T(v_j)=\min[T(v_j),P(v_i)+w_{ij}]\quad (j\text{ 为与 }i\text{ 相邻且为 T 标点的点})$$

如果 $T(v_j)>P(v_i)+w_{ij}$，则把 $T(v_j)$ 的值修改为 $P(v_i)+w_{ij}$。

(3) 比较以前过程中剩余的所有具有 T 标号的点，把最小的 T 标号括号中对应点 v_j 的标号改为 P 标号：$P(v_j)=\min[T(v_j)]$。

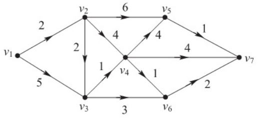


图 6.11 例 6.2 示意图

(4) 若全部的点均已为 P 标号，则计算停止，否则转回到步骤(2)。

【例 6.2】 用 D 算法求解图 6.11 中从 v_1 到 v_7 的最短路。

解： (1) 首先给 v_1 一P 标号，$P(v_1)=0$，其余各

点给 T 标号，$T(v_i)=\infty$，$(i=2, 3, \cdots, 7)$。

已知 v_2、v_3 与 v_1 相邻，且方向从 v_1 出发，记为 T 标号，于是有

$$T(v_2)=\min[T(v_2), P(v_1)+w_{12}]=\min[\infty, 0+2]=2$$
$$T(v_3)=\min[T(v_3), P(v_1)+w_{13}]=\min[\infty, 0+5]=5$$
$$P(v_i)=\min[T(v_2), T(v_3)]=2=P(v_2)$$

(2) 考虑 v_2 点，有 v_3、v_4、v_5 与 v_2 相邻

$$T(v_3)=\min[T(v_3), P(v_2)+w_{23}]=\min[\infty, 2+2]=4$$
$$T(v_4)=\min[T(v_4), P(v_2)+w_{24}]=\min[\infty, 2+4]=6$$
$$T(v_5)=\min[T(v_5), P(v_2)+w_{25}]=\min[\infty, 2+6]=8$$
$$P(v_i)=\min[T(v_3), T(v_4), T(v_5)]=4=P(v_3)$$

(3) 考虑 v_3 点，有 v_4、v_6 与 v_3 相邻，前面剩余的 T 标号点 $T(v_5)$

$$T(v_4)=\min[T(v_4), P(v_3)+w_{34}]=\min[6, 4+1]=5$$
$$T(v_6)=\min[T(v_6), P(v_3)+w_{36}]=\min[\infty, 4+3]=7$$
$$P(v_i)=\min[T(v_4), T(v_5), T(v_6)]=\min(5, 8, 7)=5=P(v_4)$$

(4) 考虑 v_4 点，有 v_5，v_6，v_7 与 v_4 相邻

$$T(v_5)=\min[T(v_5), P(v_4)+w_{45}]=\min[8, 5+4]=8$$
$$T(v_6)=\min[T(v_6), P(v_4)+w_{46}]=\min[7, 5+1]=6$$
$$T(v_7)=\min[T(v_7), P(v_4)+w_{47}]=\min[\infty, 5+4]=9$$
$$P(v_i)=\min[T(v_4), T(v_5), T(v_6)]=\min(8, 6, 9)=6=P(v_6)$$

(5) 考虑 v_6 点，有 v_7 与 v_6 相邻，前面剩余的 T 标号点 $T(v_5)$

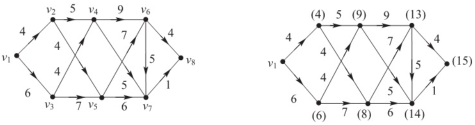
$$T(v_7)=\min[T(v_7), P(v_6)+w_{67}]=\min[9, 6+2]=8$$
$$P(v_i)=\min[T(v_5), T(v_7)]=\min(8, 8)=8=P(v_5)=P(v_7)$$

由点 v_1 到点 v_7 的最短距离为 8。这时由终点向前反推，可找到 v_1 到网络中各个点的最短路线为：$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_7$ 和 $v_1 \to v_2 \to v_5$。

对于有向图，a_{ij} 表示弧的方向 $v_i \to v_j$，可以认为 a_{ji} 的路不通，即 $T(a_{ji})=\infty$。Dijkstra 的算法依然有效。

用 Dijkstra 算法也可以通过列表方法求解最短路。

【例 6.3】 下面通过列表方法给出求解的过程，求解示意图如图 6.12 所示。



(a) 网络图　　(b) v_s到各点的最小权值图

图 6.12　例 6.3 示意图

根据表 6-1 来分析运用 Dijkstra 算法的过程。

(1) 步骤 1 到步骤 7，$v_1 \sim v_8$ 对应的单元格中，第一行为各点对应的 T 标号取值，第二行为上一步 P 标号的取值加上考察点到其相邻点的权值，即 $p(v_i)+w_{ij}$。

表 6-1 Dijkstra 算法求解过程

步骤	考察点	T 标号点集	$T(v_i)$ P 标号 [ ]							
			v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
0	ν_1	$\nu_2\sim\nu_8$	[0]	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	ν_1	$\nu_2\sim\nu_8$		∞ [0+4]	∞ 0+6	∞	∞	∞	∞	∞
2	ν_2	$\nu_3\sim\nu_8$			[6] ∞	∞ 4+5	∞ 4+4	∞	∞	∞
3	ν_3	$\nu_4\sim\nu_8$				9 6+4	[8] 6+7	∞	∞	∞
4	ν_5	ν_4，$\nu_6\sim\nu_8$				[9]		∞ 8+5	∞ 8+6	∞
5	ν_4	$\nu_6\sim\nu_8$						[13] 9+9	14 9+7	∞
6	ν_6	$\nu_7\sim\nu_8$							[14] 13+5	∞ 13+4
7	ν_7	ν_8								17 [14+1]

(2) 在每一步中找最小值，用“[ ]”标注，即 $p(\nu_i)=\min[T(相邻的\ T\ 标号点集)]$，其对应的列点 ν_j 从 T 标号点集中去掉，作为新的 P 标号考察点，直到 T 标号点集为空为止。

(3) 运用公式：$P(\nu_j)=\min[T(\nu_j)]$，按有下划线的 $p(\nu_j)$ 由终点向前反推，找出上一级的 $p(\nu_i)$点，即 [ ] 标志对应列方向的点 ν_i，可得到 ν_1 到网络中各个点的最短路线为：$\nu_1\to\nu_2\to\nu_5\to\nu_7\to\nu_8$，$\nu_1\to\nu_2\to\nu_5\to\nu_6$，$\nu_1\to\nu_3$ 和 $\nu_1\to\nu_2\to\nu_4$。

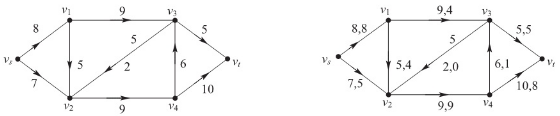
6.3 最大流问题

6.3.1 模型及基本理论

现实生活中存在许多流量问题，如交通运输网络中的人流、车流、物流，供水网络中的水流，金融系统中的现金流，通信系统中的信息流等流量，如何使网络输送(或传输)能力达到最大，就属于最大流问题。

【例 6.4】 如图 6.13(a)所示，假定为一个电力输送网，每条弧上的数字表示其最大容量(单位为兆瓦)，现在的目的是要把电力由发电厂 ν_s输送到地区 ν_t处，问：如何安排输送，才能使得由 ν_s到 ν_t输送的电力最大?

在网络 $D=(V, A, C)$中，设 ν_s为发点，ν_t为收点，其余各点为中间点；以 f_{ij}表示弧(ν_i, ν_j)上的流量，总流量设为 F，c_{ij}为每一条弧上的容量。一个网络 G 的流量值定义为从起点流出的总流量 $V(f)$，应满足容量限制条件和流量平衡条件：每一条弧上的流量应小



(a) 电力输送网络图　　(b) 容量和运量的一个方案

图 6.13　例 6.4 示意图

于等于容量，中间点的流入量总和等于其流出量总和，对于始点和终点，总输出量等于总输入量，则网络 D 上的最大流问题的线性规划模型为

$$\max F=V(f)$$

$$s.t.\begin{cases}0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij} \\ \sum f_{ij}-\sum f_{ji}=\begin{cases}\nu(f) & \text{发点} \\ 0 & \text{中间点} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1;\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ n) \\ -\nu(f) & \text{收点}\end{cases}\end{cases} \tag{6-5}$$

其中，$V(f)=\sum\limits_{j\in V}f_{sj}$

图 6.13(b)给出了例 6.4 的一个方案，每条弧上的数字表示该方案中的容量和运输量(c_{ij}，f_{ij})。这一方案使得 13 个单位的电力由 ν_s 送到 ν_t，这一方案是不是最优方案呢？换一种说法，这一网络中的总输出量还能否再增加呢？为此需要先了解一些最大流问题的基本概念。

1. 可行流与最大流

满足式(6-5)约束条件的流 f 称为可行流，可行流总是存在的。如果所有的弧的流量均取 0，即对于所有的 i、j，$f_{ij}=0$，称此可行流为零流。如果某一个弧的流量 $f_{ij}=c_{ij}$，则称流 f_{ij} 为饱和流，否则为非饱和流。$f_{ij}>0$ 的弧称为非零流弧。定义在边集合 E 上的任意一个函数 $f=\{f_{ij}\}$ 为网络 G 上的一个流。最大流问题就是求一个可行流 $f=\{f_{ij}\}$，使其总流量 F 达到最大。

2. 割集与割量

给定网络 $D=(V,\ A,\ C)$，设 S、T 为 V 中的两个非空的真子集，$\nu_s\in S$，$\nu_t\in T$，且有 $S\cup T=V$，$S\cap T=\varnothing$，则把弧集$(S,\ T)$称为分离 ν_s 和 ν_t 的割集。每一割集中的所有弧的容量之和，称为该割集的割量。

例如，在图 6.13 中加两道虚线，如图 6.14 所示，得到点集 $S_1=\{\nu_s\}$ 和 $T_1=\{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4,\ \nu_t\}$，以及 $S_2=\{\nu_s,\ \nu_1,\ \nu_2\}$ 和 $T_2=\{\nu_3,\ \nu_4,\ \nu_t\}$。相应的割集分别为$(S_1,\ T_1)=\{(\nu_s,\ \nu_1),\ (\nu_s,\ \nu_2)\}$ 和 $(S_2,\ T_2)=\{(\nu_1,\ \nu_3),\ (\nu_2,\ \nu_3),\ (\nu_2,\ \nu_4)\}$。其割集容量分别为 15 和 20。

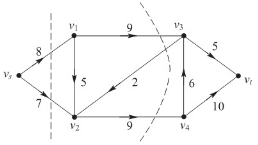


图 6.14　割集示意图

网络中的割集并不唯一。虽然割集有多个，但割集数量有限。在网络中，割量最小的割集称为最小割集，其割量为网络的最小割量，简称为最小割。由于任一割集均为网络中由 ν_s 到 ν_t 的必经之路，所以，网络中的任一可行流都将不会超过相应每个割集的割量，而最大流必为网络中的最小割。

定理 6-3(最大流最小割定理)　在任一网络中，从 ν_s 到 ν_t 的最大流的流量等于分割 ν_s 和 ν_t 的最小割的容量。

3. 前向弧、后项弧和增广链

设 μ 是网络 D 中从发点 ν_s 到收点 ν_t 的一条路，若弧的方向与路 μ 的方向一致，则称为前向弧，前向弧的全体记为 μ^+；另一类是弧的方向与路 μ 的方向相反，则称为后向弧，后向弧的全体记为 μ^-。

给定一个可行流 f，μ 是一条从 ν_s 到 ν_t 的路，若满足以下条件

(1) 对弧 $(\nu_i, \nu_j) \in \mu^+$，有 $0 \leqslant f_{ij} < c_{ij}$，且 μ^+ 中的每一条弧都是非饱和弧。

(2) 对弧 $(\nu_i, \nu_j) \in \mu^-$，有 $0 < f_{ij} \leqslant c_{ij}$，且 μ^- 中的每一条弧都是非零流弧。

则称 μ 为关于可行流 f 的一条增广链。

进一步可以得出结论：若 f^* 是网络中的一个最大流，则 D 中不存在关于 f^* 的增广链。

增广链的实际意义是，沿着这条路从 v_s 到 v_t 输送的流还有潜力可挖，只需对可行流 f 进行调整，就可以把流量提高。调整后的流在各点上仍然满足平衡条件及容量限制条件。这样就得到了一个寻求最大流的方法：从一个可行流开始，寻求关于这个可行流的增广链：若存在，则进行调整，得到一个新的可行流，其流量会比以前有所增加。重复这个过程，直到不存在关于该流的增广链时，便得到了最大流。

6.3.2 求最大流的标号算法

寻找最大流的方法实际上是寻找增广链，以使网络的流量不断增加，直到最大为止。对于简单的网络图通常可以很容易地看到所有的增广链，然后逐一地调整其流量，直到没有增广链为止。但是对于复杂的网络图，并不能通过观察找出其增广链，而此时就需要采用标号算法来寻找到最大流。

1. 标号过程

在这个过程中，对网络中的各点进行标号，标号后的点被分为已检查的点和未检查的点两种。每个标号点的标号内容包括两部分：①第一标号，表示该标号的前一步是从哪一点得来的，以便找出增广链；②第二标号是为确定增广链的调整流量 θ，改进 f 用的。在网络中通常用一个圆括号将这两部分括在一起，形如(第一标号，第二标号)。

首先给发点 ν_s 以标号 $(0, +\infty)$。

第一步，选择一个已经标号的点 ν_i，对于 ν_i 的所有未给标号的邻接点 ν_j 按下列规则处理。

(1) 若弧 $(\nu_i, \nu_j) \in A$，且 $f_{ij} < c_{ij}$，则令 $\theta_j = \min(c_{ij} - f_{ij}, \theta_i)$，并给 ν_j 以 $(+\nu_i, \theta_j)$。

(2) 若弧 $(\nu_j, \nu_i) \in A$，且 $f_{ji} > 0$，则令 $\theta_j = \min(\theta_i, f_{ji})$，并给 ν_j 以 $(-\nu_i, \theta_j)$。

第二步，重复第一步，直至收点 ν_t 被标号为止。

这时，ν_i 是标号且已检查过的点。在标号过程中，D 中的有些点有可能被标上多个标

号，有的标号来自于(1)，有的可能来自(2)，这时保留(1)得到的标号；若从(1)得到的标号有多个时，保留 θ_i 值最大的一个作为标号。

如果 v_t 得到了标号，说明存在一条增广链，可转入调整过程；若 v_t 标号过程已无法进行，说明 f 已是最大流。

2. 调整过程

首先按 v_t 及其他点的第一个标号，利用反向追踪的办法找出增广链 μ，然后沿着增广链调整 f 以增加流量，调整方法如下

令
$$f'_{ij}=\begin{cases} f_{ij}+\theta, & 若(v_i, v_j)\in\mu^+ \\ f_{ij}-\theta, & 若(v_i, v_j)\in\mu^- \\ f_{ij}, & 若(v_i, v_j)\notin\mu \end{cases}$$

调整结束后去掉所有标号，回到标号过程的第一步，对可行流 f' 重新标号。

对于例 6.4，可以以图 6.13(b)给出的方案为可行流，用标记法求网络的最大流，网络图如图 6.15 所示。

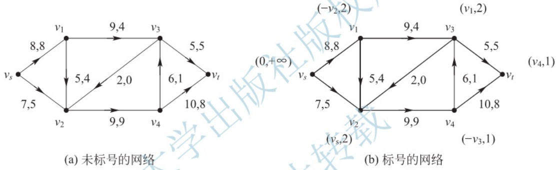


图 6.15 例 6.4 的网络图

解：1) 标号过程

(1) 给发点 v_s 标上 $(0, +\infty)$。

(2) 对 v_s 进行检查，从 v_s 点出发的边 (v_s, v_1) 上，$f_{s,1}=c_{s,1}=8$，不满足标号条件，故 v_1 得不到标号；在边 (v_s, v_2) 上，$f_{s,2}<c_{s,2}$，故 v_2 得到标号

$$(v_s, \theta_2), \theta_2=\min\{\theta_s, (c_{s,2}-f_{s,2})\}=\min\{\infty, (7-5)\}=2$$

即 $(v_s, 2)$，v_s 成为已检查过的点。

(3) 取已标号而未检查的点 v_2，检查 v_2 在边 (v_1, v_2) 上，$f_{1,2}=4>0$，故得到标号 $(-v_1, \theta_1)$，并且有 $\theta_1=\min(\theta_2, f_{1,2})=\min(2, 4)=2$，即 $(-v_2, 2)$；在边 (v_3, v_2) 上，$f_{3,2}=0$，故 v_3 得不到标号；在边 (v_2, v_4) 上，$f_{2,4}=c_{2,4}=9$，故 v_4 得不到标号，v_2 也成为已检查过的点。

(4) 检查 v_1 在边 (v_1, v_3) 上，$f_{1,3}<c_{1,3}$，故 v_3 得到标号

$$(v_3, \theta_3), \theta_3=\min\{\theta_1, (c_{1,3}-f_{1,3})\}=\min\{2, (9-5)\}=2$$

即 $(v_1, 2)$，v_1 成为已检查过的点。

(5) 检查 v_3，在边 (v_3, v_t) 上，$f_{3,t}=c_{3,t}=5$，故 v_t 得不到标号；在边 (v_3, v_4) 上，$f_{3,4}=1>0$，故得到标号 $(-v_3, \theta_4)$，并且有 $\theta_4=\min(\theta_3, f_{3,4})=\min(2, 1)=1$，即 $(-v_3, 1)$。

(6) 检查 v_4，在边 (v_4, v_t) 上，$f_{4,t}<c_{4,t}$，故 v_t 得到标号

$(\nu_4,\ \theta_t)$，$\theta_t=\min\{\theta_4,\ (c_{4,t}-f_{4,t})\}=\min\{1,\ (10-8)\}=1$

即$(\nu_4,\ 1)$，ν_t成为已检查过的点，进入下阶段调整过程。

2）调整过程

(1) 按反向追踪，由发点的第一个标记找到一条增广链$(\nu_s\nu_2\nu_1\nu_3\nu_4,\ \nu_t)$，如图 6.16(a)所示的双线。

(2) 按 $\theta=\theta_t=1$，调整增广链各边的流量

$$f'_{s,2}=f_{s,2}+\theta=5+1=6$$
$$f'_{1,3}=f_{1,3}+\theta=4+1=5$$
$$f'_{4,t}=f_{4,t}+\theta=8+1=9$$
$$f'_{1,2}=f_{1,2}-\theta=4-1=3$$
$$f'_{4,3}=f_{4,3}-\theta=1-1=0$$

其他边上的流量保持不变。调整后得到网络图上的一个新的可行流，如图 6.16(b)所示。

重复上述标号过程，寻求增广链。第二次给每一个点标号如图 6.16(c)所示，开始给 s 标号$(0,\ +\infty)$，检查 ν_s，给 ν_2 标号$(\nu_s,\ 1)$；检查 ν_2，给 ν_1 标号$(-\nu_2,\ 1)$；检查 ν_1，给 ν_3 标号$(\nu_1,\ 1)$；检查 ν_3，在边$(\nu_3,\ \nu_4)$上，$f_{3,4}=0$，边$(\nu_3,\ \nu_t)$上，$f_{3,t}=c_{3,t}=5$，均不符合标号条件，标号过程无法进行，故图 6.16(b)给出的可行流就是网络的最大流。最大流量为

$$V(f^*)=f_{s,1}+f_{s,2}=f_{3,t}+f_{4,t}=14$$

现已标号的顶点集合 $S=\{\nu_s,\ \nu_2,\ \nu_1,\ \nu_3\}$，未标号的顶点集合 $T=\{\nu_4,\ \nu_t\}$，$(S,\ T)=\{(\nu_2,\ \nu_4),\ (\nu_3,\ \nu_t)\}$，其割集容量为 14。由此可见，最小割的容量大小就是最大流的流量。

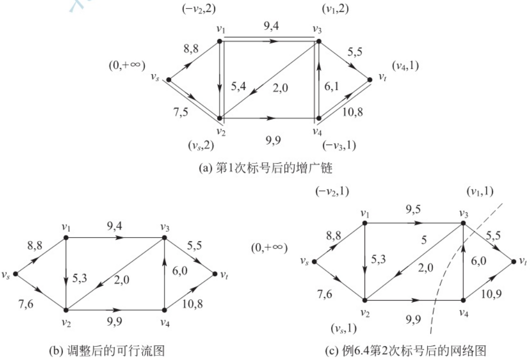


图 6.16 例 6.4 标号及调整过程

6.4 最小费用最大流问题

6.4.1 模型及基本概念

前面两节分别讨论了最短路和最大流的问题，但是在实际生活中人们所遇到有关“流”的问题往往是两者的结合，在求解最大流问题的时候，如果考虑管道的长度、运送成本等因素，则通过单位流量的费用也会有差别。所以，一般除了要求通过的流量最大外，经常还希望通过一定流量的费用也能最小化，这就是最小费用最大流问题。

最小费用最大流问题的一般提法是：在一个给定的网络 $D=(V, A, C, B)$ 的每一条弧上，除了给出容量 c_{ij} 之外，还给出了每一弧上单位流量的费用 b_{ij}，当最大流不唯一时，在这些最大流中求一个 f，使流 f 的总费用达到最小，即

$$\min b(f)_{f:f为最大流}=\sum b_{ij} * f_{ij}\big|_{(v_i,v_j)\in E}$$

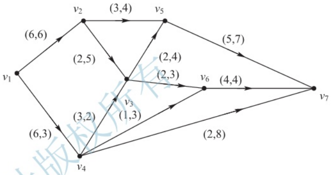


图 6.17 例 6.5 的网络图

【例 6.5】 有一石油输送管网如图 6.17 所示，弧上的括号中标注的是 (c_{ij}, b_{ij})，求输送管网最大流方案。

解： 最大流方案 1 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_7$，$f^1=3$ $v_1 \to v_4 \to v_7$，$f^2=2$
$v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_7$，$f^3=1$ $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_7$，$f^4=2$
$v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_6 \to v_7$，$f^5=2$，最大流量为 10。

最大流方案 2 $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_7$，$f^1=3$ $v_1 \to v_4 \to v_7$，$f^2=2$
$v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_7$，$f^3=1$ $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_7$，$f^4=1$
$v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_5 \to v_7$，$f^5=1$ $v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_6 \to v_7$，$f^6=2$，最大流量也为 10。

不难看出，当最大流问题有多重方案时，一定存在最小费用最大流。

6.4.2 最小费用最大流问题的解法

解决这类问题的方法可以从最小费用出发，每次找出最小的支路单位流量费用，再求出累计的最小费用最大流(算法一)；也可以从最大流出发，在最小的支路单位流量费用存在的前提下，寻找增广链(算法二)。

1) 算法一的步骤

(1) 在不考虑费用的情况下，计算网络的最大流，以确定停止计算的条件。

(2) 求解网络 v_s 到 v_t 的最短路问题，即最小的支路单位流量费用 b^1，确定支路的最大流量 f^1，然后求出该支路的费用流为 $b_1(f)=b^1\times f^1$。

(3) 网络中不考虑已饱和的支路，再寻求次最短路单位流量费用和支路的流量，依次开始寻求 $b^3\cdots$，$f^3\cdots$，累计支路的费用流 $F=\sum b^i\times f^i$。

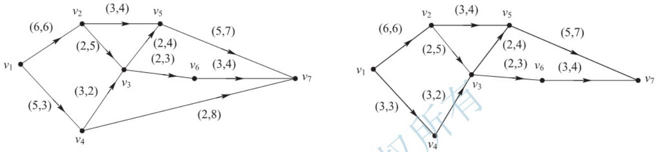
(4) 当累计的输出流量等于网络的最大流时，即得到给定流量条件下的最小费用最大流。

下面用算法一对例 6.5 求解最小费用最大流。

解： (1) 在不考虑费用的情况下，(c_{ij}, b_{ij}) 可视为 $(c_{ij}, 0)$，则求出网络的最大流为 $f=10$。

(2) 在不考虑流量的情况下，(c_{ij}, b_{ij})可视为$(0, b_{ij})$，求出第一条最小费用支路：$v_1 \to v_4 \to v_6 \to v_7$，单位流量费用 $b^1=3+3+4$，支路流量 $f^1=\min(6, 1, 4)=1$，支路费用流 $b_1(f)=b^1\times f^1=10\times1=10$。调整网络流量，$v_1\to v_4\to v_6\to v_7$各支路流量减 1，由于支路$(v_4, v_6)$流量已饱和，网络中 v_4与 v_6之间断开，由此得到新的网络，如图 6.18(a)所示。

(3) 在查找次最小费用支路即新网络的最小费用支路时，网络的最小费用支路为 $v_1\to v_4\to v_7$，单位流量费用 $b^2=3+8$，支路流量 $f^2=\min(6-1, 2)=2$，累计流量$\sum f^i=1+2=3$，支路费用流 $b^2\times f^2=11\times2=22$。这时可将$(v_4, v_7)$之间断开，$v_1\to v_4\to v_7$各支路流量减 2，如图 6.18(b)所示。



(a) 消去第一条饱和支路　　(b) 消去第二条饱和支路

图 6.18　例 6.5 的网络算法一图解过程

(4) 类似第(3)步不断迭代查找，当累计流量达到 10 时或从 v_1 到 v_7不再有流量支路时，就得到了网络的最小费用最大流，见表 6-2。

表 6-2　最小费用最大流求解过程

支路	最小费用支路(最短路)	单位流量费用 b^i	流量 f^i	支路费用流 $b^i\times f^i$	累计流量 f^i	累计费用流 $b^i\times f^i$
1	$v_1\to v_4\to v_6\to v_7$	10	1	10	1	10
2	$v_1\to v_4\to v_7$	11	2	22	3	32
3	$v_1\to v_4\to v_3\to v_6\to v_7$	12	2	24	5	56
4	$v_1\to v_4\to v_3\to v_5\to v_7$	16	1	16	6	72
5	$v_1\to v_2\to v_5\to v_7$	17	3	51	9	123
6	$v_1\to v_2\to v_3\to v_5\to v_7$	22	1	22	10	145

2) 最小费用最大流的算法二

第一步，取 $k=0$，$f^{(0)}=0$，$f^{(0)}$是零流中费用最小的流。

第二步，构造一个赋权有向图 $W(f^{(k)})$，它的顶点与原来的网络图 D 的顶点相同，但把 D 中的每一条边(v_i, v_j)变成两个方向相反的边(v_i, v_j)和(v_j, v_i)，两边的权分别为 w_{ij} 和 w_{ji}

$$w_{ij}=\begin{cases} b_{ij} & 若\ f_{ij}<c_{ij} \\ \infty & 若\ f_{ij}=c_{ij} \end{cases},\quad w_{ji}=\begin{cases} -b_{ij} & 若\ f_{ij}>0 \\ \infty & 若\ f_{ij}=0 \end{cases}$$

权值为∞的边在图 $W(f^{(k)})$中可以不表示出来。

第三步，采用最短路算法，在赋权有向图 $W(f^{(k)})$中找出 v_s到 v_t的最短路，此时分以

下两种情况。

(1) 若不存在最短路，则 $f^{(k)}$ 就是最小费用最大流，算法终止。

(2) 若存在最短路，记为 μ，则 μ 是原网络中的一个增广链，在增广链 μ 上对 $f^{(k)}$ 进行调整

$$f_{ij}^{(k)}=\begin{cases} f_{ij}+\theta & 若(v_i,\ v_j)\in\mu^+ \\ f_{ij}-\theta & 若(v_i,\ v_j)\in\mu^- \\ f_{ij} & 若(v_i,\ v_j)\notin\mu \end{cases}$$

调整量为 $\theta=\min[\min\limits_{\mu^+}(c_{ij}-f_{ij}^{(k)}),\ \min\limits_{\mu^-}(f_{ij}^{(k)})]$，于是得到一个新的可行流

$$f^{(k+1)}=\begin{cases} f^{(k)}+\theta & 若(v_i,\ v_j)\in\mu^+ \\ f^{(k)}-\theta & 若(v_i,\ v_j)\in\mu^- \\ f^{(k)} & 若(v_i,\ v_j)\notin\mu \end{cases}$$

令 $k=k+1$，转入第二步。

【例 6.6】 用算法二求图 6.19(a)最小费用最大流，弧上的数字为(c_{ij}，b_{ij})。

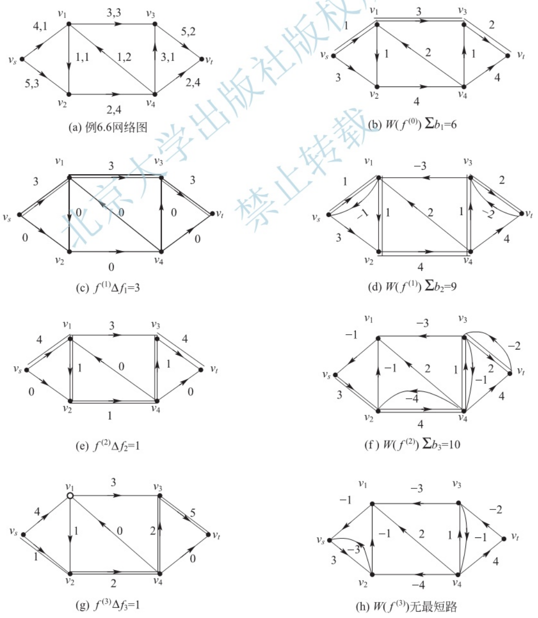


图 6.19 例 6.9 的网络算法二图解过程

解：(1) 取 $f^{(0)}=0$ 为初始可行流。

(2) 构造一个赋权有向图 $W(f^{(0)})$，采用最短路算法，在赋权有向图 $W(f^{(k)})$ 中找出 ν_s 到 ν_t 的最短路：(ν_s，ν_1，ν_3，ν_t)，如图 6.19(b)$W(f^{(0)})$ 双线所示。

(3) 在原网络与最短路相应的增广链是 $\mu=\{\nu_s, \nu_1, \nu_3, \nu_t\}$，在 μ 上进行调整，$\theta=\min[4, 3, 5]=3$，如图 6.19(c)$f^{(1)}$ 双线所示。

(4) 构造新的赋权有向图 $W(f^{(1)})$，并求出 ν_s 到 ν_t 的最短路：(ν_s，ν_1，ν_2，ν_4，ν_3，ν_t)，如图 6.19(d)所示。

(5) 在增广链 $\{\nu_s, \nu_1, \nu_2, \nu_4, \nu_3, \nu_t\}$ 上进行调整，$\theta=\min[(4-3), 1, 2, 3, (5-3)]=1$，如图 6.19(e)$f^{(2)}$ 所示。

(6) 重复上述步骤，可得到 $W(f^{(3)})$，并求出 ν_s 到 ν_t 的最短路：(ν_s，ν_2，ν_4，ν_t)，如图 6.19(f)所示。

6.5 应用案例

案例 1

旅行商问题

已知北京(B)某国际旅行社安排纽约(N)、巴黎(P)、伦敦(L)、东京(T)、墨西哥(M)的旅游项目，从北京出发乘飞机分别到这 5 个城市巡回旅行，每个城市只去一次，最后回到北京，各城市之间的航线距离如权矩阵 S 所示

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{S}= \end{array}\begin{array}{c|cccccc} & L & M & N & P & B & T \\ \hline L & — & 56 & 35 & 21 & 51 & 60 \\ M & 56 & — & 21 & 57 & 78 & 70 \\ N & 35 & 21 & — & 36 & 68 & 68 \\ P & 21 & 57 & 36 & — & 51 & 61 \\ B & 51 & 78 & 68 & 51 & — & 13 \\ T & 60 & 70 & 68 & 61 & 13 & — \end{array} \text{(百千米)}$$

试问如何安排旅游路线，使旅游路程最短？

案例 2

总部选址问题

某矿区有 10 个矿井，分布如图 6.20 所示，其中 ν_1、ν_2、…、ν_{10} 表示这 10 个矿井所在地，边表示两矿井的道路，边上的数字为两者之间的距离，这 10 个矿井每天的矿石产量分别是 3、4、2、6、3、4、5、2、1、7(单位：吨)，现在要在这 10 个矿井点选中一处建矿石加工厂，问如何选址最为理想。

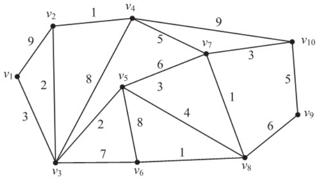


图 6.20 矿井分布图

习 题

1. 下列序列为某个网络图所有顶点的次的序列，说明它们能否形成一个简单图。

(1) 2，4，2，3，1，3　　(2) 7，3，5，4，1　　(3) 2，3，3，4，4

2. 已知有 8 种化学物品 A、B、C、D、P、R、S、T 要由库房保管。为了存放安全，下列物品不能放在同一柜子里：A—R，A—T，A—C，P—R，P—D，P—S，S—T，T—B，B—D，D—C，R—S，R—B，S—C，S—D，问存放这 8 种物品至少需要多少个柜子？

3. 求出图 6.21 的最小生成树。

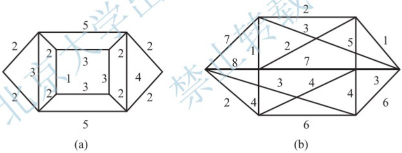


图 6.21 网络图

4. 有若干个城市图如图 6.22 所示，点表示城市，连线表示城市间有道路连接，数字表示道路的长度。计划从 S 铺设管道到 T，设计一条最短路径。

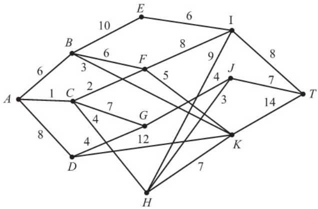
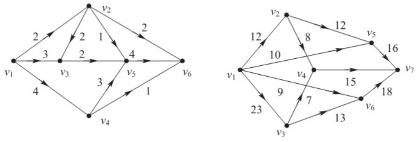


图 6.22 费用流量图

5. 求图 6.23 节点 1 到节点 6(或 7)的最大流。



(a) (b)

图 6.23 流量图

6. 已知图 6.24 中弧表示的是(c_{ij}, b_{ij})，求图节点 1 到节点 6 的最小费用最大流。

7. 已知图 6.25 中弧为(c_{ij}, b_{ij})，如果节点 1 到节点 7 的流量仅为 8 个单位，确定网络的最小费用最大流。

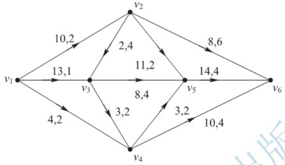


图 6.24 费用流量图

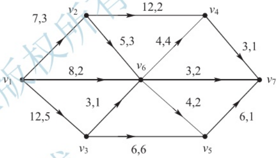


图 6.25 费用流量图

关键词及其英文对照

图论	graph theory	网络	network
子图	subgraph	生成子图	spanning graph
导出子图	induced subgraph	顶点	vertices
节点	node	边	edge
次	degree	链	chain
路径	path	起点	origin
终点	terminus	孤立点	isolated vertices
悬挂点	pendant vertices	环	cycle
回路	circuit	连通图	connected graph
权	weight	赋权图	weighted graph
简单图	simple graph	树	tree
生成树	spanning tree	最小生成树	minimal spanning tree
最优树	optimaltree	截集，割集	cut set
容量函数	capacity function	流	flow
零流	zero flow	最大流	maximum flow
增广链	augmenting chain		

第 7 章　决　策　论

决策论又称决策分析，是运筹学的重要分支之一。从个人日常生活、工作到国家的政治、经济、军事和科研等领域，无一不存在决策问题。有关国家大政方针的决策更为重要，它直接影响到国家的发展、民族的兴衰。同样，企业管理中的重大决策直接影响到它的生存与发展。

朴素的决策思想自古就有，在中外历史上不乏有名的决策案例(包括成功的与失败的)。但在落后的生产方式下，决策基本是凭借个人知识、智慧和经验进行的。随着生产和科学技术的发展，要求决策者在瞬息多变的条件下，对复杂的问题迅速做出决断，这就要求对不同类型的决策问题，有一套科学的决策原则、程序和相应的机构、方法。

本章首先是关于决策的基本概念及确定型决策的扼要介绍；接着讨论非确定型决策和风险型决策的主要方法，灵敏度分析等，其中风险型决策是本章的重点内容；最后介绍目前国内外已经得到广泛应用的多目标决策及其层次分析法。

7.1　决策论概述

7.1.1　决策的概念和分类

所谓决策，就是为达到某种预定的目标，在若干可供选择的行动方案中，决定最佳方案的一种过程。简单地讲，决策就是决定的意思。诺贝尔奖获得者西蒙有一句名言“管理就是决策”，颇有见地。总之，决策是管理的核心，决策分析是各级管理人员的基本职能。下面介绍一个决策问题所必须具备的基本要素和决策问题的分类。

1. 决策模型的构成要素

(1) 决策者(决策者可以是个人，也可以是集体，一般指领导者或领导集体)及决策者期望达到的目标。

(2) 不少于两个的可行方案(包括了解研究对象的属性、确立目的和目标)，用 d_i 表示。

(3) 不少于两个的自然状态(即不为决策者所控制的客观存在)，用 s_j 表示。

(4) 每一个行动方案在各自然状态下的损益值(收益或损失)，通常用损益函数 $f(d_i, s_j)$ 来表示方案 d_i 在状态 s_j 下的损益值。由于可行方案和自然状态通常是有限多个，损益函数可以用矩阵或表格形式给出，称为损益值表或决策表。

(5) 选择方案的准则(决策者判别所选方案是否最优的根据)。

2. 决策问题的分类

决策问题的分类有多种形式：按决策的内容可分为定性决策、定量决策和混合决策；按决策的重要性可分为战略决策、策略决策和执行决策；按决策过程的连续性可分为单项决策和序贯决策(多级决策)。在一般情况下，按决策环境分为确定型决策、非确定型决策

和风险型决策。

确定型决策问题的特点是，只有“一种确定的自然状态”，其他要素不变。而风险型决策问题虽不知哪种自然状态会在今后发生，但其发生的概率信息可以事先掌握，其他要素不变。非确定型决策问题的特点是不掌握这种概率的信息，其他要素不变。

7.1.2 决策的一般过程

1. 面向决策目标的方法

确立目标→收集信息→提出方案模型→方案优选→决策，因此，任何决策都有一个过程和程序，决非决策者灵机一动的瞬间产物。

2. 面向决策过程的方法

此法认为掌握了过程且能控制过程，就能正确地预见决策的结果，它一般包括预决策→决策→决策后 3 个相互依赖的阶段。决策后阶段往往也是下次决策的预决策阶段，而决策的实施是决策的继续。

3. 决策分析的步骤

一般有 7 个环节，如图 7.1 所示。

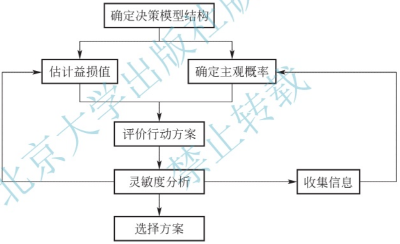


图 7.1 决策分析流程图

(1) 确定决策模型结构。一般待决策人确立了决策准则、备选的方案和各种状态后，即可据此确定益损矩阵(表)结构或决策树的结构。

(2) 估计益损值。通过有关销售、经济核算、商业调查等统计资料和预测信息等来估算各种方案在不同状态下的益损值，这是决策分析定量计算的主要依据之一。

(3) 确定主观概率。即收集和估算各种状态未来可能出现的概率值。

(4) 评价行动方案。根据各方案的益损值及主观概率，可以计算各方案的益损期望值等，然后根据决策准则选择最优方案。

(5) 灵敏度分析。由于所估算的行动方案益损值和确定的主观概率含有主观臆断的成分，由此选定的最优方案是否可靠，可以用灵敏度分析进行检验。可以将模型中的有关参数改变，来分析其对方案益损期望值的影响情况，找出各主要参数的允许变动范围。若各参数在允许范围内变动，则可以认为原来选择的最优方案的结论仍可信。

(6) 收集信息。通过灵敏度分析后，若发现方案的优先顺序对某些参数变化反应很灵

敏，则必须进一步收集有关信息，改进模型结构中的有关数据。

（7）选择方案。在上述各决策步骤完成后，可选择方案，并准备组织实施。

7.1.3 决策准则

在进行一项决策时，为了评价各种策略效果的好坏，就要拟定出相应的标准——决策准则。对于不同类型的决策问题，应采用不同的准则。

对于确定型决策，由于自然状态只有一个，且是确定的，因此只需直接比较各策略的效果(用益损值来反映)。

对于非确定型决策，由于决策者对状态发生的信息一无所知，从而对这类决策问题，需要主观地确定一项择优准则。究竟选择哪一种准则，这与决策者的水平和态度有关。

对于风险型决策，由于已知其状态变量的概率分布，因此决策时就需要比较各策略的期望值来选择最优策略。

除以上所述外，还有一种采取效用值作为评价标准的方法，它对各类决策问题均可使用。

7.2 确定型决策

确定型决策问题除必须满足 7.1.1 节所列出的基本要素外，还要求各状态完全确定。这类决策问题只要比较不同策略的损益值，按目标规定选出具有最大收益值或最小损失值的最优方案。

这类决策问题常用的方法概括如下。

1. 一般计量方法

一般计量方法是指在适当的数量标准的情况下，用来表示方案效果的计量方法。显然这种方法有一定的局限性，只能适用于简单的确定型问题。

2. 经济分析方法

经济分析的方法很多，如投资回收期法、成本效益分析法、盈亏平衡分析法、经济计量法、统计报表法、现金流量贴现法等，这一类分析方法不属于运筹学课程研究的内容。

3. 运筹学方法

运筹学方法是用数学模型(包括模拟模型)进行决策的一类方法。前几章较深入讨论过的规划论(线性规划、整数规划、动态规划等)网络分析、存储论、排队论等都属于这类决策分析的方法。

因此，不再单独讨论确定型决策问题。

7.3 非确定型决策

当各个自然状态的概率没有确定时，决策问题就是非确定型决策。用不同的方法进行决策，其决策的结果往往是不一样的。这是由于决策的准则与选择标准不同而造成的，很难断言哪一种决策方法更好。但是其决策的结果仍可供决策者作为决策的参考。下面介绍 5 种常用的非确定型决策方法(准则)。

7.3.1 乐观法(最大最大决策准则)

基本思想：决策者对客观情况总是抱乐观态度，决不放弃任何一个可获得最好结果的机会，用好中之好的态度选择方案。计算公式为

$$r^* = \max_i \{\max_j f(d_i, s_j)\} \tag{7-1}$$

其中，$f(d_i, s_j)$表示收益，使上式成立的方案即为最优方案。若 $f(d_i, s_j)$是损失时，则乐观法应是最小最小准则，公式为

$$r^* = \min_i \{\min_j f(d_i, s_j)\}$$

注意：在客观条件一无所知的情况下，采用这种决策方法风险较大，使用时要十分慎重。

7.3.2 悲观法(最大最小决策准则)

基本思想：悲观法也称为瓦尔德准则，决策者对客观情况总是抱悲观态度，从各种最坏的情况出发，然后再考虑从中选择一个最好的结果，因此叫最大最小决策准则。计算公式为

$$r^* = \max_i \{\min_j f(d_i, s_j)\} \tag{7-2}$$

其中，$f(d_i, s_j)$为收益，使式(7-2)成立的方案即为最优方案。若 $f(d_i, s_j)$表示损失，则悲观法应采用最小最大准则，公式为

$$r^* = \min_i \{\max_j f(d_i, s_j)\}$$

7.3.3 折中法(乐观系数法)

基本思想：乐观系数法也称为赫威兹准则，这是一种折中的决策准则，决策者对其客观条件的估计既不乐观也不悲观，主张从中平衡一下。用一个数字表示乐观程度，这个数字称为乐观系数 $\alpha \in [0, 1]$，若$(a_{ij})_{m\times n}$是收益矩阵时，计算公式为

$$CV_i = \alpha \max_j \{a_{ij}\} + (1-\alpha)\min_j \{a_{ij}\}, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$r^* = \max_j \{CV_i\} \tag{7-3}$$

使式(7-3)成立的方案即为最优方案。显然 $\alpha=0$ 时就是悲观法；$\alpha=1$ 时就是乐观法。

若考虑损失矩阵$(b_{ij})_{m\times n}$，则按式(7-4)计算

$$CV_i = \alpha \min_j \{b_{ij}\} + (1-\alpha)\max_j \{b_{ij}\} \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$r^* = \min_j \{CV_i\} \tag{7-4}$$

7.3.4 平均法(等可能准则)

基本思想：由于决策者不能肯定哪种状态容易出现，粗略地认为各自然状态出现的可能性是均等的。因此每个行动方案的收益值可以平均地加以计算，从中选择平均收益最大的方案作为比较满意的方案。计算公式为

$$r^* = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(d_i, s_j) \right\} \tag{7-5}$$

其所对应的方案即为最优方案。

若考虑的是损失值 $f(d_i, s_j)$和损失矩阵$(b_{ij})_{m\times n}$，则应选择最小期望损失，按式(7-6)计算。

$$r^* = \min_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(d_i, s_j) \right\} \tag{7-6}$$

7.3.5 最小遗憾法(后悔值法)

基本思想：决策者在决策时，一般易于接受某一状态下收益最大的方案，但由于无法预先知道哪一种状态一定出现，因此，当决策时如果没有采纳收益最大的方案，就会有后悔之感。把最大收益值与其他收益值之差作为后悔值。人们自然希望后悔值最小(遗憾最小)，所以这种决策方法也称为最小后悔值法，简称后悔值法。

过程：先从收益矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$中找出每列的最大元素$a_j^*=\max\limits_i(a_{ij})$，$j=1，2，\cdots，n$。再用各列的最大元素$a_j^*$分别减去该列中的各元素，得到

$$\bar{a}_{ij}=a_j^*-a_{ij}=\max_i\{a_{ij}\}-a_{ij}，\quad i=1，2，\cdots，m \tag{7-7}$$

由后悔值$\bar{a}_{ij}$构成后悔损失阵$(\bar{a}_{ij})$，再按悲观法进行决策。

$$r^*=\min_i\{\max_j(\bar{a}_{ij})\} \tag{7-8}$$

它所对应的方案即为后悔值法的最优方案。

【例7.1】 某公司将推出一种新产品，有3种推销方案：让利销售(d_1)、送货上门(d_2)、不采取措施(d_3)；未来市场可能有畅销(s_1)、一般(s_2)、滞销(s_3)3种状态。假设事先不知道这3种自然状态出现的概率，但知道各种状态下各方案的赢利，见表7-1。试用以上介绍的5种决策方法进行决策(乐观系数$\alpha=0.6$)。

表7-1 方案赢利信息

方案 \ 赢利 \ 市场状态	畅销(s_1)	一般(s_2)	滞销(s_3)
让利销售(d_1)	60	10	−6
送货上门(d_2)	30	25	0
不采取措施(d_3)	10	10	10

解：收益矩阵$(a_{ij})=\begin{bmatrix}60 & 10 & -6\\30 & 25 & 0\\10 & 10 & 10\end{bmatrix}$

(1) 乐观法：$\max\limits_i\ \max\limits_j\{a_{ij}\}$。

即$\max\limits_j\{60，10，-6\}=60$，$\max\limits_j\{30，25，0\}=30$，$\max\limits_j\{10，10，10\}=10$

$r_1^*=\max\{60，30，10\}=60$，对应的最优方案为$d_1$。

(2) 悲观法：$\max\limits_i\min\limits_j\{a_{ij}\}$。

即$\min\limits_j\{60，10，-6\}=-6$，$\min\limits_j\{30，25，0\}=0$，$\min\limits_j\{10，10，10\}=10$

$\max\limits_i\{-6，0，10\}=10$，对应的最优方案为$d_3$。

(3) 乐观系数法：$\alpha=0.6$ 。

即$1-\alpha=0.4$，那么有

$$CV_1=0.6\times60+0.4\times(-6)=33.6$$

$$CV_2=0.6\times30+0.4\times0=18$$

$$CV_3=0.6\times10+0.4\times10=10$$

$\max\limits_i\{CV_i\}=33.6$，故对应的最优方案为 d_1。

（4）平均法：$\max\limits_i\left\{\dfrac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right\}=\max\limits_i\{21.3, 18.3, 10\}=21.3$，故最优方案为 d_1。

（5）后悔值法：由计算公式得 $\bar{a}_{ij}=a_j^*-a_{ij}=\max\limits_i\{a_{ij}\}-a_{ij}$，$i=1, 2, \cdots, m$，

得 $\bar{a}_{11}=60-60=0$，$\bar{a}_{12}=25-10=15$，$\bar{a}_{13}=10-(-6)=16$

$\bar{a}_{21}=60-30=30$，$\bar{a}_{22}=25-25=0$，$\bar{a}_{23}=10-0=10$

$\bar{a}_{31}=60-10=50$，$\bar{a}_{32}=25-10=15$，$\bar{a}_{33}=10-10=0$

最后可得后悔值矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & 16 \\ 30 & 0 & 10 \\ 50 & 15 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \max\{0, 15, 16\}=16 \\ \max\{30, 0, 10\}=30 \\ \max\{50, 15, 0\}=50 \end{array}$$

所以 $r^*=\min\limits_i\{16, 30, 15\}=16$，故选择 d_1 为最优方案。

由上例可知，同样一个问题，对于非确定型决策问题，用不同的方法进行决策，其决策的方案往往是不一样的。这是由于决策的原则与选择标准不同而造成的，很难断言哪一种决策方法更好。为了使非确定情况下的决策更合理些，最好的办法就是对各种自然状态做调查研究，努力搜集所需的信息，设法估计出各状态出现的概率，然后再进行决策，这就是 7.4 节要讨论的风险型决策。

7.4 风险型决策

对于风险型决策由于已知其状态变量出现的概率分布，因此决策时就需要比较各策略的期望值来选择最优策略。本节介绍最大可能法则、期望值方法、后验概率方法(贝叶斯决策)、决策树方法和灵敏度分析这 5 种方法。

7.4.1 最大可能法则

基本思想：从自然状态中取出概率最大的作为决策的依据(自然状态概率最大的当做概率是 1，其他的自然状态当做概率是 0)，将风险型决策转化为确定型决策来处理。

【例 7.2】 某厂要确定下个计划期间产品的生产批量，根据以前经验并通过市场调查和预测，其产品批量决策见表 7-2。通过决策分析，确立下一个计划期内的生产批量，使企业获得效益最大。其中 d_i 表示行动方案，a_{ij} 表示效益值，$P(\theta_j)$表示自然状态的概率，θ_j 表示自然状态。

表 7-2 产品批量决策表 单位：千元

θ_j / $P(\theta_j)$ / a_{ij} / d_i	产品销路		
	θ_1(好)	θ_2(一般)	θ_3(差)
	$P(\theta_3)=0.2$	$P(\theta_1)=0.3$	$P(\theta_2)=0.5$
d_1(大批量生产)	20	12	8
d_2(中批量生产)	16	16	10
d_3(小批量生产)	12	12	12

解：由表 7-2 可知 θ_2 的概率最大，因而产品销路 θ_2 的可能性也最大，由最大可能准则可知，只需考虑 θ_2 的自然状态进行决策，使之变为确定型决策问题；再由表 7-2 可知，d_2 在 θ_2 下获得最大效益值，因此选 d_2 为最优决策。

当一组自然状态的某一状态的概率比其他状态的概率都明显大时，用此法效果较好。但当各状态的概率都互相接近时，用此法效果并不好。

7.4.2 期望值方法

基本思想：将每个行动方案的期望值求出，通过比较效益期望值进行决策。由于益损矩阵的每个元素代表“行动方案和自然状态对”的收益值或损失值，因此分两种情况来讨论。

1. 最大期望收益决策准则(EMV)

当益损矩阵中的各元素代表收益值时，各自然状态发生的概率为 $P(\theta_j)=P_j$，而各行动方案的期望值为 $E(d_i)=\sum\limits_j a_{ij}P_j,(i=1,2,\cdots,n)$。

从期望收益值中选取最大值，$\max E(d_i)$，它对应的行动方案就是决策应选策略。

【例 7.3】 用最大期望收益决策准则求解例 7.2。

解：

$$E(d_1)=20\times0.3+12\times0.5+8\times0.2=13.6(\text{千元})$$
$$E(d_2)=16\times0.3+16\times0.5+10\times0.2=14.8(\text{千元})$$
$$E(d_3)=12\times0.3+12\times0.5+12\times0.3=12.0(\text{千元})$$

比较可知 $E(d_2)=14.8$ 最大，因此应当选 d_2 为最优方案。

2. 最小机会损失决策准则(EOL)

若益损矩阵中的各元素代表“方案与自然状态对”的损失值，各自然状态发生的概率为 $P(\theta_j)$，各行动方案的期望损失值为

$$E(d_i)=\sum_j a_{ij}P_j,\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

然后从这些期望损失值中选取最小者即 $\min E(d_i)$，则它对应的行动方案就是决策应选的方案。

【例 7.4】 A 厂生产的某种产品，每销售一件可赢利 50 元。但生产量超过销售量时，每积压一件，要损失 30 元。根据长期的销售记录统计和市场调查，预测到每日销售量的变动幅度及其相应的概率见表 7-3。试分析并确定这种产品的最优日产量应为多少时，才能使 A 厂的损失最小。

表 7-3 销售量及其概率表

日销售量/件	100	110	120	130
日销售概率	0.2	0.4	0.3	0.1

解：可供选择的日产量有 4 种方案：$d_1=100$ 件，$d_2=110$ 件，$d_3=120$ 件，$d_4=130$ 件，利用最小机会损失决策准则，进行损失最小的决策。

先求各“自然状态与方案对”的损失值。

当日产量 $d_1=100$ 件时，若 $s_1=100$，则损失 $s_1-d_1=0$；

若 $s_2=110$ 件，$s_2-d_1=10$，则损失 $10\times50=500$ 元；

若 $s_3=120$ 件，$s_3-d_1=20$，则损失 $20\times50=1000$ 元；

若 $s_4=130$ 件，$s_4-d_1=30$，则损失 $30\times50=1500$ 元。

当日产量为 $d_2=110$ 件，$d_3=120$ 件，$d_4=130$ 件时，类似地可以求出损失值。得到以下决策，见表 7-4。

表 7-4　日产量决策表

利润值 自然状态 方案		日销售量/件				损失期望值/元
		$S_1=100$	$S_2=110$	$S_3=120$	$S_4=130$	
		$P(s_1)=0.2$	$P(s_2)=0.4$	$P(s_3)=0.3$	$P(s_4)=0.1$	
日产量/件	$d_1=100$	0	500	1000	1500	650
	$d_2=110$	300	0	500	1000	310
	$d_3=120$	600	300	0	500	290
	$d_4=130$	900	600	300	0	510

根据表 7-4 可以求出损失期望值

$$E(d_1)=0.2\times0+0.4\times500+0.3\times1000+0.1\times1500=650(\text{元})$$

类似地，可得出 $E(d_2)=310$(元)，$E(d_3)=290$(元)，$E(d_4)=510$(元)。

表中对角线上的值为 0，即没有损失，对角线以上的损失为“生产不足”造成的损失，对角线以下的损失为“生产过剩”造成的损失，最小损失期望值 $E(d_3)=290$，对应的决策为方案 d_3。

7.4.3 后验概率方法(贝叶斯决策)

在实际决策中人们为了获取情报，往往采取各种“试验”手段(这里的试验是广义的，包括抽样调查、抽样检验、购买情报、专家咨询等)，但这样获得的情报，一般并不能准确预测未来将出现的状态，所以这种情报称为不完全情报。若决策者通过“试验”等手段获得了自然状态出现概率的新信息作为补充信息，用它来修正原来的先验概率估计。修正后的后验概率，通常要比先验概率准确可靠，可作为决策者进行决策分析的依据。由于这种概率的修正是借助于贝叶斯定理完成的，所以这种决策就称为贝叶斯决策。其具体步骤如下。

(1) 先由过去的资料和经验得出状态(事件)发生的先验概率。

(2) 根据调查或试验算得的条件概率，利用贝叶斯公式计算出各状态的后验概率，贝叶斯公式如下：

$$P(s_j/\theta_k)=\frac{P(s_j)P(\theta_k/s_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(s_i)P(\theta_k/s_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,l)\qquad(7-9)$$

其中，s_1，s_2，…，s_n 为一完备事件组；$P(s_i\cap\theta_k)=P(s_j)P(\theta_k/s_j)$(乘法公式)；$\sum\limits_{i=1}^{n}P(s_i)P(\theta_k/s_i)=P(\theta_k)$ 是全概率公式。

(3) 利用后验概率代替先验概率进行决策分析。

【例 7.5】 某石油公司考虑在某地钻井，结果可能出现 3 种情况即 3 种自然状态：无油(s_1)，少油(s_2)，富油(s_3)。其出现的概率分别是 $P(s_1)=0.5$，$P(s_2)=0.3$，$P(s_3)=0.2$。钻井费用 7 万元，若少量出油，可收入 12 万元；若大量出油，可收入 27 万元；如果不出油，收入为零。为了避免盲目钻井，可进行勘探，以便了解地质构造情况。勘探结果可能是地质构造差(θ_1)、构造一般(θ_2)或构造良好(θ_3)。由过去的经验，地质构造与油井出油的关系见表 7-5，假设勘探费为 1 万元。问：(1)应如何根据勘探结果来决定是否钻井？(2)应先进行勘探，还是不进行勘探直接钻井？

表 7-5 地质构造与油井出油关系表

$P(\theta_k/s_i)$	构造较差 θ_1	构造一般 θ_2	构造良好 θ_3	$\sum_{k=1}^{3} P(\theta_k/s_i)$
无油(s_1)	0.6	0.3	0.1	1.0
少油(s_2)	0.3	0.4	0.3	1.0
富油(s_3)	0.1	0.4	0.5	1.0

解：(1) 设 A_1 表示“钻井”，A_2 表示“不钻井”，用贝叶斯决策。

先由全概率公式得

$$P(\theta_1) = \sum_{i=1}^{3} P(s_i)P(\theta_1/s_i) = 0.5\times0.6+0.3\times0.3+0.2\times0.1 = 0.41$$

$$P(\theta_2) = 0.5\times0.3+0.3\times0.4+0.2\times0.4 = 0.35$$

$$P(\theta_3) = 1-0.41-0.35 = 0.24$$

再由贝叶斯公式计算后验概率得

$$P(s_1/\theta_1) = \frac{P(s_1)P(\theta_1/s_1)}{P(\theta_1)} = \frac{0.5\times0.6}{0.41} = 0.7317$$

$$P(s_2/\theta_1) = \frac{P(s_2)P(\theta_1/s_2)}{P(\theta_1)} = \frac{0.3\times0.3}{0.41} = 0.2195$$

$$P(s_3/\theta_1) = 1-0.7317-0.2195 = 0.0488$$

同理可得 $P(s_1/\theta_2)=0.4286$， $P(s_2/\theta_2)=0.3428$， $P(s_3/\theta_2)=0.2286$

$P(s_1/\theta_3)=0.2083$， $P(s_2/\theta_3)=0.375$， $P(s_3/\theta_3)=0.4617$

以后验概率为依据，采用期望值准则进行决策。

若勘探结果是地质构造较差(θ_1)，则

$E(A_1)=0\times0.7317+12\times0.2195+27\times0.0488-8$(勘探费及钻井费)$=-4$(万元)

$E(A_2)=-1$(万元)(勘探费) 故 $A^*=A_2$，即不钻井。

若勘探结果是地质结构一般(θ_2)，则

$E(A_1)=0\times0.4286+12\times0.3428+27\times0.2286-8=2.29$(万元)

$E(A_2)=-1$(万元) 故 $A^*=A_1$，即钻井。

若勘探结果是地质结构良好(θ_3)，则

$E(A_1)=0\times0.2083+12\times0.3750+27\times0.4167-8=7.75$(万元)

$E(A_2)=-1$(万元) 故 $A^*=A_1$，即钻井。

(2) 确立是否先进行勘探。

若先进行勘探，其期望最大收益为

$E(B)=-1\times0.41+2.29\times0.35+7.75\times0.24=2.25$(万元)

若不进行勘探，即用先验概率考虑，则

$E(A_1)=0\times0.5+12\times0.3+27\times0.2-7$(钻井费用)$=2$(万元)

$E(A_2)=0$(万元)

由此，$A^*=A_1$，即最优决策是钻井，最优期望收益为 2 万元。另外，由于 $2.25>2$，所以应先进行勘探，然后再决定是否钻井。

7.4.4 决策树方法

用益损期望值决策准则所解决的问题也可用决策树方法进行分析解决。决策树方法还适用于序贯决策(多级决策)，是描述序贯决策的有力工具。用决策树来进行决策，具有分析思路清晰、决策结果形象明确的优点。

决策树就是借助于图与网络中的“树”来模拟决策，即把各种自然状态(及其概率)、各个行动方案用点和线连接成“树图”，再进行决策。决策树如图 7.2 所示。

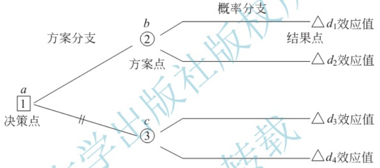


图 7.2 决策树示意图

□表示决策点，其上方数字 a 为决策的效应期望值，列出的分支称为“方案分支”，分支个数反映了可能的行动方案数。

○表示方案点，其上方数字 b，c 为该方案的效应期望值，引出的分支称为“概率分支”，每个分支的上面写明自然状态的概率，分支的个数就是可能的自然状态数。

△表示结果点，它是决策树的“树梢”，其旁边的数字是每一方案在相应状态下的效应值。

//表示修剪，比较各行动方案的效应期望值的大小，确定最佳方案分支，其他分支舍去，称为修剪分支。

运用决策树方法的几个关键步骤如下。

(1) 画出决策树，画决策树的过程也就是对未来可能发生的各种事件进行周密思考、预测的过程，把这些情况用树状图表示出来，先画决策点，再找方案分支和方案点，最后再画出概率分支。

(2) 由专家估计法或用试验数据推算出概率值，并把概率写在概率分支的位置上。

(3) 计算益损期望值，由数梢开始，按从右向左的顺序进行，用期望值法计算，若决策目标是赢利时，比较各分支，取期望值最大的分支，其他分支进行修剪。

如果用决策树法可以进行多级决策，多级决策(序贯决策)的决策树至少有两个以上决策点。

【例 7.6】 将 7.4.1 节中例 7.2 用决策树方法求解。

解： 先由实际问题画出决策树，如图 7.3 所示。

计算各点的益损期望值。

② 点：$20\times0.3+12\times0.5+8\times0.2=13.6$

③ 点：$16\times0.3+16\times0.5+10\times0.2=14.8$

④ 点：$12\times0.3+12\times0.5+12\times0.2=12$

经比较可知 $E(d_2)$ 最大，因此 d_2 是最优方案。

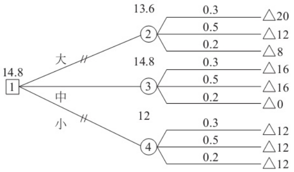


图 7.3　例 7.6 的决策树示意图

【例 7.7】 修建一个使用 10 年的机场，有两个方案：一是修建大机场，需投资 300 万元；二是修建小机场，投资 120 万元。估计机场使用良好 3 年后再扩建大机场，需投资 200 万元，但随后的 7 年中，每年可获利 95 万元，否则不扩建。用决策树法确定修建方案，其收益见表 7－6。

表 7－6　方案收益表　　　　单位：万元/年

收益 状态 / 方案	使用良好(s_1) $P(s_1)=0.7$	使用一般(s_2) $P(s_2)=0.3$
建大机场(d_1)	100	－25
建小机场(d_2)	40	20

解： 画决策树，如图 7.4 所示。由于本题是序贯决策，需按 7 年和 3 年两个阶段处理。注意有两个决策点。

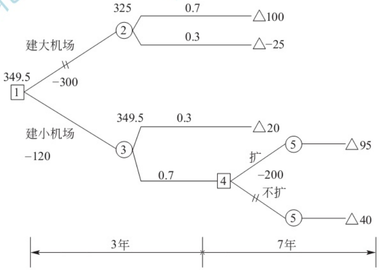


图 7.4　例 7.7 的决策树示意图

计算各点的益损值或益损期望值。

⑥点：$40\times7=280$(万)

⑤点：$95\times7-200=465$(万)

因为 $465>250$，选择扩建方案，修剪不扩建方案。

③点：$[465+40\times3]\times0.7+[20\times10]\times0.3-120=349.5$

②点：$[100\times0.7+(-25)\times0.3]\times10-300=325$

因为 349.5>325，选择建小机场，修剪建大机场方案，将 349.5 写在决策点□上方。

本问题的最优决策方案：选择修建小机场，如果使用情况良好，3 年后再进行扩建，否则就不扩建。

7.4.5 灵敏度分析

各行动方案所造成的结果(益损值)和某种自然状态可能出现的概率，都是由过去的统计资料经验而得到的，由此评定的最优方案是否正确、可靠呢？灵敏度分析就是检验这种情况所做的工作。该方法的关键是先按一定规则改变决策模型中的重要参数，找出在最优方案时各参数的允许变动范围。若各参数在允许范围内，则可认为原来选择的最优方案的结论仍然可信，仍然比较稳定。若原来估计的主观概率稍有变动，最优方案立即有变，说明该最优方案是不稳定的，应该进一步予以分析并调整模型。

【例 7.8】 某厂生产一产品，拟定甲、乙两个方案。若已知该产品销路好和销路差两种状态的概率分别为 0.2 和 0.8，并可估算出两种方案在今后 5 年内不同状态下的益损值，见表 7-7。问：选择哪一种方案最优？

表 7-7　方案益损信息表

方案 \ 状态 / 概率 / 益损值	销路好	销路差
概率	**0.2**	**0.8**
甲(d_1)	30	−5
乙(d_2)	100	−35

解： 先做出决策树图，如图 7.5 所示。

由此求出

$$E(d_1)=0.2\times30+0.8\times(-5)=2$$

$$E(d_2)=0.2\times(100)+0.8\times(-35)=20-28=-8$$

经比较后可知最优方案是甲。

若原先估计的概率有了变化，由市场调查得产品销路好和销路差的概率均为 0.5，经过重新计算，其最优方案的结论也有改变，即不是原先的甲方案，而是乙方案了，如图 7.6 所示。

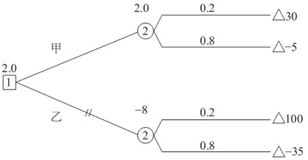


图 7.5　例 7.8 的决策树示意图

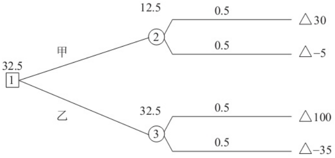


图 7.6　例 7.8 的决策树示意图

那么，自然状态的概率究竟变化多大才不会改变原先所选择的最优方案呢？下面用灵敏度分析给出回答。

设 α 表示销路好的概率；则 $1-\alpha$ 是销路差的概率。现设甲、乙两方案的益损期望值相等，则有

$$\alpha\times30+(1-\alpha)\times(-5)=\alpha\times100+(1-\alpha)\times(-35)$$

$$30\alpha-5+5\alpha-100\alpha+35-35\alpha=0$$

$$令\ f(\alpha)=30-100\alpha=0，得\ \alpha=0.3$$

上述情况表明，当销路好的概率 $\alpha=0.3$ 时，甲，乙两方案的益损期望值相等，即 $f(\alpha)=0$ 时，两方案等价。当 $f(\alpha)>0$ 时，甲方案优于乙方案，当 $f(\alpha)<0$ 时，乙方案优于甲方案。所以 $\alpha=0.3$ 时称为转折概率或临界概率。

最初当销路好的概率为 0.2 时，甲为最优方案，概率 $0.2<0.3$，因此所选择的最优方案是比较稳定的。但若原来估计的主观概率稍有微小变动，最优方案立即有变，说明该优选方案是不稳定的，应进一步加以分析和调整。

7.5 多目标决策方法简介

实际中的许多决策问题都有两个或两个以上的目标，这类问题就叫做多目标决策问题。多目标决策在工程技术、经济、社会、军事等领域都有广泛的应用。如在经济管理工作中，往往要考虑费用、质量、利润等评价准则，并依据这些准则建立管理工作的目标。又如在人才的选拔、招聘、评优等活动中，由于各人有自己的特长、优势和不足，决策部门总是要综合考虑各方面的条件做出选择，这一般也是一个多目标决策问题。

7.5.1 多目标决策问题的概念与模型

1. 多目标决策模型的基本要素

任何一个多目标决策问题的模型都包含有 5 个基本要素：决策单元、目标集、属性集、决策情况和决策规则。

(1) 决策单元即决策者。

(2) 目标集是关于决策者所研究问题的“要求”或“愿望”，由若干个不同的目标构成一个目标集。通常情况下，目标集可以表示成一个递阶结构。

(3) 属性集是指实现决策目标程度的一个度量，即每一个目标都可以设定一个或若干个属性，从而构成一个属性集。目标的属性是可度量的，它反映了特定目标所达到目的的程度。

(4) 决策情况是指决策问题的结构和决策环境，即说明决策问题的决策变量、属性，以及度量决策变量与属性的标度、决策变量与属性之间的因果关系等。

(5) 决策规则又称决策准则，是指用于排列方案优劣次序的规则，而方案的优劣是依据所有目标的属性值来衡量的。

2. 多目标决策问题的解决过程

多目标决策问题的求解过程主要分为以下 4 个步骤。

第一步：问题的构成，即对所要解决的实际问题进行分析，明确问题中的主要因素、

界限、所处的环境等，从而确定问题的目标集。

第二步：建立数学模型，即根据第一步的结果，建立与问题相适宜的数学模型。

第三步：对模型进行分析和评价，即对各种可行方案进行比较，从而可以对每一个目标定一个(或几个)属性(称为目标函数)，这些属性的值可以作为采用某方案时各个目标的一种度量。

第四步：确定实施方案，即依据每一个目标的属性值和预先规定的决策规则，比较各种可行的方案，按优劣次序将所有的方案排序，从而确定出最好的可实施方案。

3．多目标决策问题的数学模型

设 X 为方案集，即决策变量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合，$f_1(\boldsymbol{x})$，$f_2(\boldsymbol{x})$，$f_n(\boldsymbol{x})$ 为目标函数。对于每一个给定的方案 $\boldsymbol{x}\in X$，由目标函数可以确定各个属性的一组值 f_1，f_2，…，f_n。实际中方案集 X 可以是有限的，也可以是无限的。不妨设决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的所有约束都能用不等式表示出来，即

$$g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{7-10}$$

其中，$g_i(\boldsymbol{x})(i=1, 2, \cdots, m)$ 均为决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的实值函数。则方案集 X(又称决策空间中的可行域)可以表示为

$$X=\{\boldsymbol{x}\in E^N \ g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, m\} \tag{7-11}$$

于是一般的多目标决策问题的数学模型可表示为

$$\begin{gathered}\underset{\boldsymbol{x}\in X}{\mathrm{DR}}[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x})]; \\ s.t.\ X=\{\boldsymbol{x}\in E^N \mid g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, n\}\end{gathered} \tag{7-12}$$

其中，DR(Decision Rule)表示决策规则，上述模型的意思是运用决策规则 DR，依据属性 f_1，f_2，…，f_n 的值，在 X 中选择最优的决策方案。

7.5.2 多目标决策的一般性方法

对于多目标决策问题，最主要的特点是个目标间的“矛盾性”和“不可公度性”。所谓目标间的矛盾性是指，如果试图通过某一种方案去改进一个目标的指标值，则可能会使另一个目标的值变坏。而目标间的不可公度性是指，各目标间一般没有统一的度量标准，因而一般不能直接进行比较。

实际中，对于目标间的不可公度性可以通过各目标的效用来解决。将问题的各个目标都采用相应的效用(各属性对于决策者欲望的满足程度)来刻画。设各目标的效用函数为

$$\nu_i(\boldsymbol{x})=V(f_i(\boldsymbol{x})) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

这样就解决了各目标间的不可公度性问题。

对于目标之间的矛盾性，类似地可以采用多属性效用函数来解决。多属性效用函数理论是单属性效用理论的推广，其定义为多属性综合作用的结果对人们欲望的满足程度，它是各属性效用函数的函数，即定义为

$$V(\boldsymbol{x})=F(\nu_1(\boldsymbol{x}), \nu_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \nu_n(\boldsymbol{x}))$$

由此，对于一般的多目标决策问题，可以转化为以多属性效用函数为目标函数的单目标规划问题。值得注意的是，对于不同的多属性效用函数可能会得到不同的决策结果，应根据具体的情况来定义多属性效用函数。在实际应用中，按照多属性效用函数的不同，形成了几种常用的多属性效用函数构造方法，即线性加权法、变权加权法和指数加权法等，

限于篇幅，在此不再赘述。

7.6　多目标决策的层次分析法

层次分析法(AHP)是美国运筹学家 T. L. Saaty 于 20 世纪 70 年代中期创立的一种定性与定量分析相结合的多目标决策方法。其本质是试图使人的思维条理化、层次化。它充分利用人的经验和判断，并予以量化，进而评价决策方案的优劣，并排出它们间的优先顺序。由于 AHP 的应用简单有效，特别对目标结构复杂，并且缺乏必要的数据资料的情况(如社会经济系统的评价项目)更为实用。应用层次分析法进行系统评价，其主要步骤有：构造多级递阶结构模型，建立比较的判断矩阵，计算相对重要度，进行一致性检验，计算综合重要度等。

7.6.1　构造多级递阶结构模型

层次分析法的多级递阶结构模型有如下 3 种形式。

(1) 完全相关性结构：其结构特点是上一级的每一要素与下一级的所有要素都是相关的。如图 7.7 所示，某部门欲进行投资，有 3 种投资方案可供选择(图 7.7 中的第 3 级)，而对任意一种方案，投资评价主体均要用上一级(图 7.7 中第 2 级)的风险程度、资金利润率和转产难易程度 3 个评价项目来评价。因为无论是哪个投资方案都会涉及上述 3 个方面。

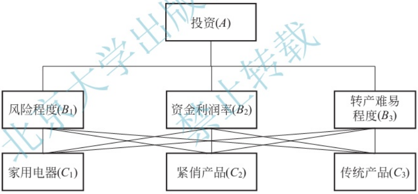


图 7.7　完全相关性结构图

(2) 完全独立性结构：其结构特点是上一级要素都有各自独立的、完全不相同的下级要素与之联系，如图 7.8 所示。

(3) 混合结构：相关性结构和完全独立结构的结合，也可以说既非完全相关又非完全独立的结构，如图 7.9 所示。

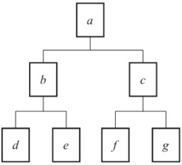


图 7.8　完全独立性结构图

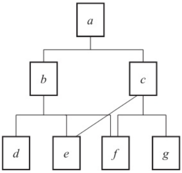


图 7.9　混合结构图

7.6.2 建立两两比较的判断矩阵

判断矩阵是计算和比较系统中各级要素相对重要度的基本信息。设有 n 个物体 A_1，A_2，…，A_n；它们的重量分别为 w_1，w_2，…，w_n（用同一种度量单位）。若要有 n 个要素与上一级要素 A_s 为比较准则，将它们两两比较重量，其比值(相对重量)可构成 $n \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$。

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}=[e_{ij}]$$

其中，主对角线上元素均为 1，其他有 $e_{ji}=\dfrac{1}{e_{ij}}=w_j/w_i$。

确定判断尺度。判断尺度是表示要素 A_i 对 A_j 的相对重要性的数量尺度。层次分析法常用的判断尺度见表 7-8。

表 7-8 判断尺度的定义表

判断尺度	定义(对上一级要素 $\boldsymbol{A}_s$ 而言，$\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{A}_j$ 比较)
1	同样重要
3	略微重要
5	重要
7	重要得多
9	绝对重要
2、4、6、8	其重要程度介于上述两个相邻判断尺度中间

【例 7.9】 以图 7.7 为例建立判断矩阵。

解： 投资(A)为第 1 级，第 2 级要素为风险程度(B_1)、资金利润率(B_2)、转产难易程度(B_3)、3 个要素与投资都有关系。今以投资(A)为准则，对 B_1，B_2 和 B_3 经过两两比较后，可建立判断矩阵 $\boldsymbol{E}$ 如下。

$$\begin{array}{c|c|cc} A & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline B_1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ B_2 & 3 & 1 & 5 \\ B_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \qquad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

风险程度与风险程度同样重要，即 $e_{11}=\dfrac{w_1}{w_1}=1$。认为资金利润率($B_2$)与风险程度($B_1$)比较略为重要，故 $e_{21}=3$，反之 $e_{12}=\dfrac{1}{e_{21}}=\dfrac{1}{3}$，对风险程度与转产难易程度比为 $e_{13}=2$，则

$e_{31}=\frac{1}{2}$，B_2 比 B_3 重要，故 $e_{23}=5$，则 $e_{32}=\frac{1}{5}$。

7.6.3 进行层次单排序(计算相对重要度)

在应用层次分析法进行系统评价时，需要知道下一级要素 B_i 对于以它为比较准则的上一级要素 A_s 的相对重要度，即 B_i 对于 A_s 的权重。

先求判断矩阵的特征向量 **W**，经过归一化处理，即可求出 B_i 对于 A_s 的相对重要度，即权重。

(1) 求特征向量 $\boldsymbol{W}$ 的分量 w_i，$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n} e_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}$ $(i=1, 2,\cdots,n)$。

(2) 归一化处理，$W_E=\sum_{i=1}^{n} w_i$。

(3) 求 A_s 的相对重要度 w_i^s(权重)，$w_i^s=\frac{w_i}{W_E}$，$(i=1, 2, \cdots, n)$。

【例 7.10】 以图 7.7 为例，将判断矩阵 **E** 的权重求出。

解：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} w_1&=\sqrt[3]{1\times\frac{1}{3}\times 2}=0.874 \\ w_2&=\sqrt[3]{3\times 1\times 5}=2.467 \\ w_3&=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times 1}=0.464 \end{aligned}$$

归一化处理，可求得 $W_E=0.874+2.467+0.464=3.805$

求权重 $w_1'=\frac{0.874}{3.805}=0.23$，$w_2'=\frac{2.467}{3.805}=0.648$

$w_3'=\frac{0.464}{3.805}=0.122$ 所以 $w_s=(0.23, 0.648, 0.122)^{\mathrm{T}}$

7.6.4 一致性检验

对复杂事物的各因素，人们采用两两比较时，不可能做到判断的完全一致，从而存在估计误差，并导致特征值及特征向量也有偏差。为了避免误差太大，应该衡量判断矩阵的一致性。

若 $\boldsymbol{EW}=n\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{W}$ 为特征向量，n 为特征值，可以证明矩阵 **E** 具有唯一的非零最大特征根 $\lambda_{\max}$，且 $\lambda_{\max}=n$，这时矩阵 **E** 称为一致性矩阵。**E** 存在判断不一致时，一般有 $\lambda_{\max}\geqslant n$。因此可以用一致性指标 $C.I.$ 检验判断矩阵，即

$$C.I.=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

$C.I.$ 值越大，判断矩阵的完全一致性越差。若 $C.I.$ 的值小于或等于 0.10 时，通常认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则需要重新进行两两比较判断。

继续求例 7.10：由 $\boldsymbol{EW}=\lambda\boldsymbol{W}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.230 \\ 0.648 \\ 0.122 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.230 \\ 0.648 \\ 0.122 \end{bmatrix}$$

解得 $\lambda_1=3.000$，$\lambda_2=3.006$，$\lambda_3=3.008$，则 $\lambda_{\max}=\lambda_3=3.008$，代入 $C.I.$ 公式得

$$C.I.=\frac{3.008-3}{3-1}=0.004<0.10$$

故上述所得的相对重要度向量 $\boldsymbol{W}_s=[0.230,\ 0.648,\ 0.122]^{\mathrm{T}}$，可以认为是一致的，是可以被接受的。

若矩阵阶数 n 较大时，可进一步使用一致性比率 $C.R.$ 指标来进行一致性检验，其公式为 $C.R.=\dfrac{C.I.}{R.I.}\times 100\%$。$R.I.$ 值见表 7 - 9。

表 7 - 9　不同阶数平均随机一致性指标值($3\leqslant n\leqslant 10$)

阶数(n)	3	4	5	6	7	8	9	10
$R.I.$(%)	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.49	1.49

同样，当 $C.R.<0.10$ 时，判断矩阵的一致性是可以被接受的。

继续求解例 7.10：$n=3$，$R.I.=0.52\%$，$C.I.=0.004$

$\therefore\quad C.R.=\dfrac{C.I.}{R.I.}\%=\dfrac{0.004}{0.52\%}\%=0.008<0.1$，可被接受。

7.6.5 进行层次总排序(计算综合重要度)

在计算各级(层)要素对上一级评价准则 A_s 的相对重要度以后，即可从最上一级开始，自上而下地求出每一组要素关于系统总体的综合重要度(也称系统总体的综合权重)，见表 7 - 10，求 C 级全部要素的综合重要度。

表 7 - 10　C 级的综合重要度

w_{ji}^2 \ w_i^1 \ B_i \ C_j	B_1	B_2	…	B_m	w_j^2
	w_1'	w_2'	…	w_m'	
C_1	w_{21}^2	w_{12}^2	…	w_{1m}^2	$w_1^2=\sum_{i=1}^{m}w_i^1w_{1i}^2$
C_2	w_{21}^2	w_{22}^2	…	w_{2m}^2	$w_2^2=\sum_{i=1}^{m}w_i^1w_{2i}^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_m	w_{n1}^2	w_{n2}^2	…	w_{nm}^2	$w_n^2=\sum_{i=1}^{m}w_i^1w_{ni}^2$

对于层次更多的模型，计算方法相同。

【例 7.11】　如图 7.7 所示，投资(A)第一层，第二层(投资方案的准则)，风险程度(B_1)，资金利润率(B_2)及转产难易程度(B_3)，第三层(3 种投资方案)，即生产某种家用电器(C_1)，生产某种紧俏产品(C_2)，生产本省的传统产品(C_3)。分析认为：若投资用来生产家用电器，其优点是资金利润率高，但因竞争厂家多，故所冒风险也大，转产困难。若投资生产本省独有的传统产品，其优点是所冒风险小，今后转产方便，但资金利润率却很

低。若投资生产紧俏产品，其优缺点则介于上述两种方案之间。因此，对上述 3 种投资方案不能立即做出评价和决策。应用层次分析法对其进行分析和评价。

解：(1) 建立多级递阶结构，如图 7.7 所示，是一个完全相关性的三级递阶结构。

(2) 建立判断矩阵，进行层次单排序，计算各级要素的相对重要度。

(3) 一致性检验，由表 7－11 可知 $C.R.$ 值全部通过一致性检验。故所有的相对重要度都是可以接受的。

表 7－11　例 7.11 判别矩阵

A	B_1	B_2	B_3	w_i^1
B_1	1	$\frac{1}{3}$	2	0.230
B_2	2	1	5	0.648
B_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1	0.122

(a) $C.R.=0.008<0.10$

B_1	C_1	C_2	C_3	w_{ji}^2
C_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0.105
C_2	3	1	$\frac{1}{3}$	0.258
C_3	5	3	1	0.637

(b) $C.R.=0.042<0.10$

B_2	C_1	C_2	C_3	w_{ji}^2
C_1	1	2	7	0.592
C_2	$\frac{1}{2}$	1	5	0.333
C_3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	0.075

(c) $C.R.=0.015<0.10$

B_3	C_1	C_2	C_3	w_{ji}^2
C_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	0.081
C_2	3	1	$\frac{1}{5}$	0.188
C_3	7	5	1	0.731

(d) $C.R.=0.067<0.10$

(4) 计算综合重要度(进行层次总排序)，见表 7－12。

表 7－12　例 7.11 的综合重要度

B / w_i' / w_{ji}^2 / C_j	B_1	B_2	B_3	w_j^2
	0.230	**0.648**	**0.122**	
C_1	0.105	0.592	0.081	0.418
C_2	0.258	0.333	0.188	0.298
C_3	0.637	0.075	0.731	0.284

其中，生产家用电器的综合重要度为

$$w_1^2=\sum_{i=1}^{3}w_i^1w_{1i}^2=0.230\times0.105+0.648\times0.592+0.122\times0.081=0.418$$

类似地可求出 $w_2^2=0.298$，$w_3^2=0.284$，总排序的一致性检验达到满意的一致性(过程略)，经比较后可知 w_1^2 最大，故投资家用电器方案最好。

7.7 应用案例

案例 1

选购计算机的决策问题

某品牌计算机公司，针对不同消费人群的不同需求，推出了 5 种不同配置的计算机，不同的配置有不同的价格。具体情况见表 7-13。

表 7-13 某品牌计算机的配置及价格

型号	CPU	内存 R	显卡 G	硬盘 H	主板 B	显示器 M	网卡 N	价格 P/元
E670C	E6700	512MB	7300LE	160GB	945GB	17 英寸 LCD	100M	6999
E630T	E6300	1GB	7600LE	160GB	975GB	17 英寸 LCD	100M	6888
E630M	E6300	512MB	6200LE	160GB	945GB	19 英寸 LCD	100M	6999
E630H	E6100	512MB	6200LE	320GB	945GB	19 英寸 LCD	100M	6666
E670W	E6700	1GB	7600LE	250GB	975GB	19 英寸 LCD	100M	7666

小王想购置一台该品牌的计算机，他用计算机性能测试软件 3D Mark 对各种配置的计算机进行了测试，E670C、E630T、E630M、E630H、E670W 这 5 款计算机的测试值分别为 5048、5124、4688、4315、5898，其数值越高，计算机的性能也越高。小王购置计算机的要求如下。

(1) 计算机的运行稳定性要好。

(2) 平时主要用于上网和文字处理工作。

(3) 喜欢下载收集好的影片。

(4) 偶尔玩玩游戏，但都是单机小游戏。

(5) 预算尽量不超过 7000 元。

(6) 价格尽量便宜实用，不要浪费。

请帮助小王选择一台该品牌的最佳配置计算机，即给出选购决策方案。

案例 2

石油开采问题

某石油公司拥有一块可能有油的土地，根据可能出油的多少，该块土地属于 4 种类型：可产油 50 万桶，20 万桶，5 万桶，无油。公司目前有 3 个方案可供选择：自行钻井，无条件将该块土地出租给其他生产者，有条件出租给其他生产者。若自行钻井，打出一口有油井的费用为 10 万元，打出一口无油井的费用是 7.5 万元，每桶油的利润是 1.5 元。若无条件出租，不管出油多少，公司收取固定租金 4.5 万元，若有条件出租，公司不收取租金，但当产量为 20 万桶至 50 万桶时，每桶收取 0.5 元。按过去的经验，该块土地属于上面 4 种类型的可能性分别为 10%，15%，25%和 50%，该公司应如何决策？

假设公司在决策前希望进行一次地震实验，以弄清该地区的地质构造。已知地震实验的费用是

12000 元，可能的结果是：构造很好，构造较好，构造一般和构造较差。根据过去的经验，地质构造与油井出油量关系见表 7-14，试考虑以下两个问题：①是否需要做地震实验？②如何根据地震实验的结果进行决策？

表 7-14　地质构造与出油量关系(概率)

$P(\theta_k/s_i)$	50 万桶(s_1)	20 万桶(s_2)	5 万桶(s_3)	无油(s_4)
构造很好(θ_1)	0.58	0.33	0.09	0.00
构造较好(θ_2)	0.56	0.19	0.125	0.125
构造一般(θ_3)	0.46	0.25	0.125	0.165
构造较差(θ_4)	0.19	0.27	0.31	0.23

习　　题

1. 填空题

(1) 决策分析按自然状态分类一般有确定型、________和________ 3 种类型。

(2) 不确定型决策分析一般常用的 5 种方法是乐观法、________、________、________、________来求解，但其决策的结果一般是________的。

(3) 从决策节点引出的分支叫________分支，由方案节点引出的分支叫________分支。

(4) 根据调查或试验算得的条件概率，利用贝叶斯公式计算出各状态的________概率。

(5) 完全相关性结构的特点是________的每一要素与________的所有要素都是相关的。

(6) 用一致性指标 $C.I.=$________检验判断矩阵。当 $C.I.\leqslant$________时，通常认为判断矩阵的一致性是可以接受的。

2. 简答题

(1) 谈谈你对本章介绍的 5 种非确定型决策准则的评价。

(2) 常用的多目标决策方法有哪些？

3. 某电视机厂面对激烈的市场竞争，拟制定利用先进技术对机型改型的计划，现有 3 个改型方案可供选择：提高图像质量(A_1)；提高图像质量并增强画面功能(A_2)；提高图像和音响质量(A_3)。根据市场需求调查，该厂彩电面临高需求(拥有 8%左右的购买者)，一般需求(拥有 6%左右的购买者)与低需求(拥有 4%左右的购买者)3 种自然状态，在这 3 种自然状态下不同的改型方案所获得的收益见表 7-15。

表 7-15　预期收益信息

S / A	高需求 S_1	一般需求 S_2	低需求 S_3
A_1	50	30	20
A_2	80	40	0
A_3	120	20	−40

试用乐观法、悲观法、平均法、折中法(乐观系数 0.6)和最小遗憾法进行决策。

4. 某机械厂生产机器部件中一种全新的小器件，这需要有一种新型的设备。他们可以购买或租借这种设备，也可以通过改造旧设备来解决这一问题。未来市场可能好，也可能坏，其概率未知。各个不同状态下的利润见表 7-16。试用悲观法、折中法($\alpha=0.8$)和最小遗憾法进行决策。

表 7-16 利润信息

d \ θ	好(θ_1)	坏(θ_2)
d_1(购买)	140	−20
d_2(租借)	95	35
d_3(改造)	100	5

5. 在习题 3 中，若决策者通过样本调查得知，高需求、一般需求、低需求 3 种状态的概率分别为 $P(S_1)=0.3$，$P(S_2)=0.5$，$P(S_3)=0.2$，见表 7-17。试用最大期望收益准则进行决策。

表 7-17 概率信息

A \ S	高需求 S_1(8%)	一般需求 S_2(6%)	低需求 S_3(4%)
P	**0.3**	**0.5**	**0.2**
A_1	50	30	20
A_2	80	40	0
A_3	120	20	−40

6. 某企业为开发一种市场需要的新产品考虑筹建一个分厂，建造大厂需投资 300 万元，建小厂投资 120 万元，使用期限为 10 年；新产品前 3 年销路好的概率为 0.7，销路差的概率为 0.3。3 年后销路好的概率为 0.9，销路差的概率为 0.1。若建大厂销路好每年可获利 100 万元，销路差每年损失 20 万元(若建大厂前 3 年销路差，以后没有转机)；若建小厂，销路好每年可获利 40 万元，销路差每年仍可获利 30 万元。若先建小厂，当销路好时 3 年后再扩建，需投资 200 万元，扩建后销路好，后 7 年中每年可获利 95 万元(扩建后销路差每年损失 20 万元)，当销路差时不再扩建，试用决策树法进行决策。

7. 某公司欲确定下一年度广告宣传方式。宣传媒介有电视(C_1)、报纸(C_2)和街头广告牌(C_3)3 种，由于考虑广告费用问题，只能选择其中一种方式进行宣传。经公司有关部门初步分析后认为：电视广告宣传面广、观众多、效果好，但需支付的费用也大；而街头广告牌情况正好相反，宣传面较窄，观众相对较少，且宣传效果一般，但支付的费用较少；报纸宣传优缺点介于上述两者之间。因此，对上述 3 种宣传方式不能立即做出决策，故要求用层次分析法来确定上述 3 种方式的优先顺序。设观众人数(B_1)，宣传效果(B_2)，广告费用(B_3)。

下面给出各级判断矩阵(见表(7-18))，计算各要素相对重要度，进行一致性检验，

计算综合重要度，最后确定上述 3 种方式的优先顺序。

表 7-18 判断矩阵

A	B_1	B_2	B_3
B_1	1	$\frac{1}{2}$	2
B_2	2	1	3
B_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

(a)

B_1	C_1	C_2	C_3
C_1	1	5	7
C_2	$\frac{1}{5}$	1	5
C_3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1

(b)

B_2	C_1	C_2	C_3
C_1	1	2	4
C_2	$\frac{1}{2}$	1	2
C_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

(c)

B_3	C_1	C_2	C_3
C_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
C_2	5	1	$\frac{1}{3}$
C_3	7	3	1

(d)

关键词及其英文对照

决策	decision making
确定型决策	decision under certaity
风险型决策	decision under risk
乐观准则	the maximax criterion
折中准则	the hurwicz criterion
后悔值准则	the minimax regret criterion
最大期望收益准则	the expected monetary value criterion
最小机会损失准则	the expected opportunity loss criterion
层次分析法	analytic hierarchy process
决策树	decision tree
决策论	decision theory
非确定型决策	decision under uncertaity
决策准则	decision criterion
悲观准则	the maximin criterion
等可能准则	the equal likelihood criterion